Cykelförrådet

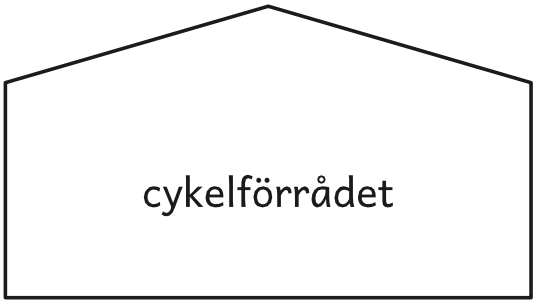
I förskolans cykelförråd står 11 cyklar. Några är tvåhjulingar och några är trehjulingar. Tillsammans har cyklarna 27 hjul.



tvåhjuling: 2 hjul



trehjuling: 3 hjul



Frågan

Hur många tvåhjulingar och hur många trehjulingar står i förrådet?

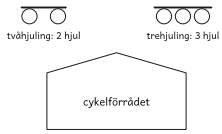
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp/problem

LÖSNINGSFÖRSLAG · ALGEBRA

CYKELFÖRRÅDET

PROBLEMET

I förskolans cykelförråd står 11 cyklar. Några är tvåhjulingar och några är trehjulingar. Tillsammans har cyklarna 27 hjul.



Hur många tvåhjulingar och hur många trehjulingar står i förrådet?

Svaret: 6 tvåhjulingar och 5 trehjulingar.
Kontroll: 6 · 2 + 5 · 3 = 12 + 15 = 27, och 6 + 5 = 11.

IDÉN: *Två okända tal som hänger ihop: en trehjuling har ett hjul mer än en tvåhjuling.*

LÖSNING A: BYTA UT TVÅHJULINGAR

tvåhjulingar	trehjulingar	hjul
11	0	22 för få
9	2	24
7	4	26 →
6	5	27 ✓

Så räknade vi raden 7 och 4:

7 · 2 = 14
4 · 3 = 12
14 + 12 = 26

Eleven prövar i en tabell och byter tvåhjulingar mot trehjulingar, tills hjulen blir 27.

LÖSNING B: KALLA TREHJULINGARNA X

x = antalet trehjulingar
11 − x = antalet tvåhjulingar

3x + 2(11 − x) = 27
↓
3x + 22 − 2x = 27 (2 · 11 = 22)
↓
x + 22 = 27 → x = 27 − 22 = 5

5 trehjulingar och 11 − 5 = 6 tvåhjulingar

Kontroll: 5 · 3 + 6 · 2 = 15 + 12 = 27 ✓

Eleven kallar trehjulingarna x och tvåhjulingarna 11 − x och löser 3x + 2(11 − x) = 27.

LÖSNING C: TANKEVURPA

Om alla är trehjulingar:
27 / 3 = 9
Svar: 9 trehjulingar.

Hjulen stämmer, men det blir bara 9 cyklar, och det ska vara 11.
Fråga: ”Vilket villkor i problemet har eleven glömt?”

FRÅGOR OM TANKARNA BAKOM

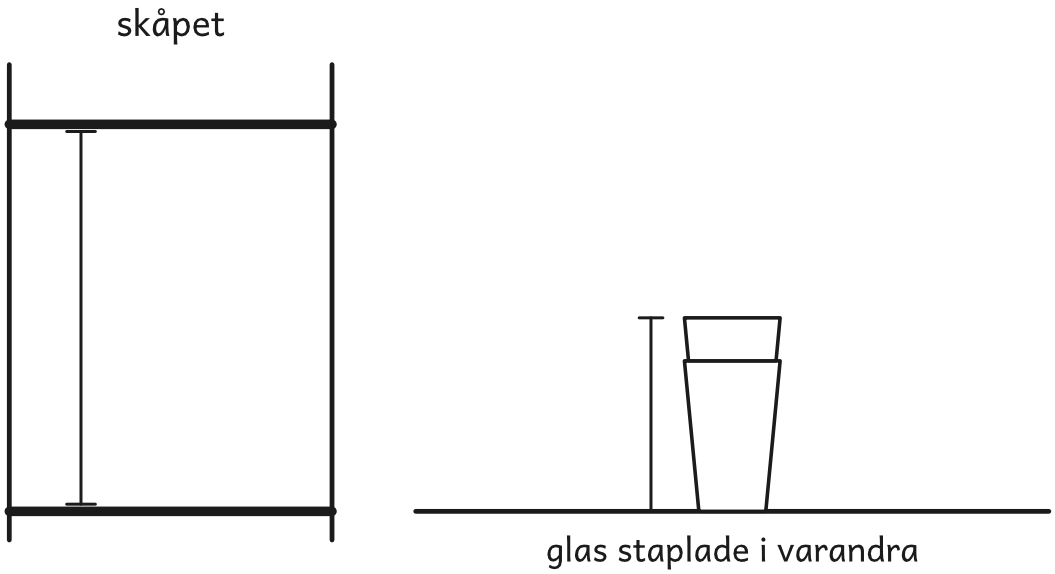
1. Vad gör eleven i lösning A från rad till rad?
2. Varför skriver eleven i lösning B 11 − x för tvåhjulingarna?
3. Var syns det i båda lösningarna att en trehjuling har ett hjul mer än en tvåhjuling?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 110 cyklar och 270 hjul, och varför?

VISA OCH JÄMFÖR LÖSNINGAR

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Glasstapeln

I ett skåp är det 36 cm mellan två hyllor. Glasen i skåpet är likadana och staplas i varandra. En stapel med 2 glas är 18 cm hög. En stapel med 8 glas är 42 cm hög.



Frågan

Hur många glas kan stå i en stapel mellan hyllorna?

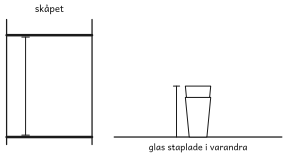
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp/problem

LÖSNINGSFÖRSLAG · SAMBAND OCH FÖRÄNDRING

GLASSTAPELN

PROBLEMET

I ett skåp är det 36 cm mellan två hyllor. Glasen i skåpet är likadana och staplas i varandra. En stapel med 2 glas är 18 cm hög. En stapel med 8 glas är 42 cm hög.



Hur många glas kan stå i en stapel mellan hyllorna?

Svaret: 6 glas. Stapeln blir 34 cm hög.
Kontroll: 10 + 4 · 2 = 18, 10 + 4 · 8 = 42, och 6 glas är 34 cm och 7 glas 38.

IDÉN: *Varje glas ger 4 cm till, och de första 10 cm räknas bara en gång.*

LÖSNING A: ETT GLAS I TAGET

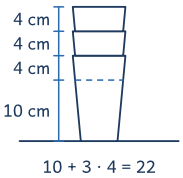
Från 2 till 8 glas:
8 − 2 = 6 glas mer
42 − 18 = 24 cm mer
↓
24 / 6 = 4 cm per glas

Svar: 6 glas

	glas	höjd i cm
	2	18
+4 ↓	3	22
+4 ↓	4	26
+4 ↓	5	30
+4 ↓	6	34 ✓
+4 ↓	7	38 för högt

Eleven räknar ut att varje glas ger 4 cm till och fortsätter tabellen tills stapeln blir för hög.

LÖSNING B: UTTRYCKET 10 + 4N



Varje glas: (42 − 18) / 6 = 4 cm till
Glaset utan kanten: 18 − 2 · 4 = 10 cm
↓
n glas: 10 + 4n cm
↓
10 + 4n = 36 ger 4n = 26
↓
n = 26 / 4 = 6,5, så 6 glas

Kontroll: 10 + 4 · 6 = 34 cm ryms, men 10 + 4 · 7 = 38 cm är för högt. ✓

Eleven skriver höjden som 10 + 4n, löser 10 + 4n = 36 och väljer 6 hela glas.

LÖSNING C: TANKEVURPA

2 glas är 18 cm.
18 / 2 = 9 cm per glas
36 / 9 = 4
Svar: 4 glas.

Glasen står i varandra, så stapeln växer 4 cm per glas. De första 10 cm räknas bara en gång.
Fråga: ”Hur hög blir stapeln med 8 glas i elevens lösning?”

FRÅGOR OM TANKARNA BAKOM

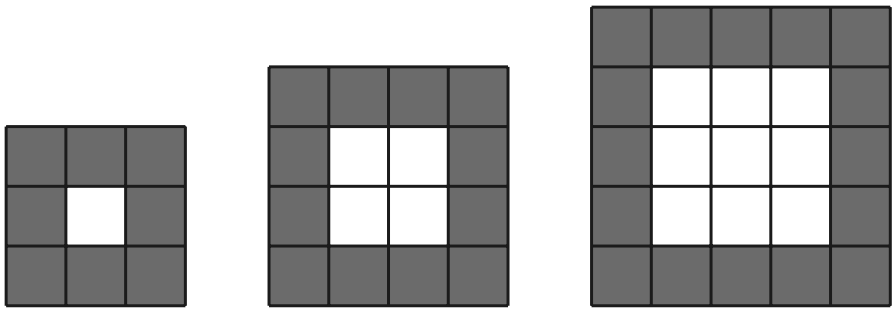
1. Vad gör eleven i lösning A från rad till rad?
2. Varför räknar eleven i lösning B 18 − 2 · 4?
3. Var syns det i båda lösningarna att varje glas ger 4 cm till?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om hyllorna var 2 m isär, och varför?

VISA OCH JÄMFÖR LÖSNINGAR

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Stenplattorna

Uteplatser läggs med kvadratiska stenplattor. I mitten ligger ljusa plattor i en kvadrat, och runt dem ligger en ram av mörka plattor. Bilden visar de tre första uteplatserna, figur 1, 2 och 3, och mönstret fortsätter likadant.



figur 1 figur 2 figur 3

Frågorna

1. Hur många ljusa och hur många mörka plattor behövs till figur 5 och till figur 10?
2. Skriv en regel för de ljusa och de mörka plattorna i figur n.

Till läraren · Hör till: Lärarens sida, bladet Två lösningar och lösningsförslaget.

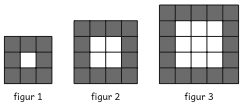
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp/problem

Lösningsförslag · Algebra

Stenplattorna

Problemet

Uteplatser läggs med kvadratiska stenplattor. I mitten ligger ljusa plattor i en kvadrat, och runt dem ligger en ram av mörka plattor. Bilden visar de tre första uteplatserna, figur 1, 2 och 3, och mönstret fortsätter likadant.



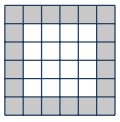
Hur många ljusa och hur många mörka plattor behövs till figur 5 och till figur 10?

Skriv en regel för de ljusa och de mörka plattorna i figur n.

Svaret: Figur 5: 25 ljusa, 24 mörka. Figur 10: 100, 44. Figur n: n^2, $4n + 4$.
Kontroll: $5^2 = 25$ och $7^2 - 5^2 = 24$, $10^2 = 100$ och $12^2 - 10^2 = 44$.

Idén: *De ljusa är en kvadrat med sidan n, och de mörka ökar med 4, en på varje sida.*

Lösning A: figur för figur


figur 4

figur	ljusa	mörka
1	1	8
2	4	12
3	9	16
4	16	20
5	25	24
10	100	44

+4 +4 +4 +4

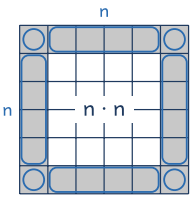
figur 10:
$10 \cdot 10 = 100$
$24 + 5 \cdot 4 = 44$

mörka:
$4 \cdot 1 + 4 = 8$
$4 \cdot 2 + 4 = 12$

figur n:
$n \cdot n$ ljusa
$4n + 4$ mörka

Eleven ritar figur 4, för in figur 1 till 5 i en tabell och ser regeln i talen.

Lösning B: se strukturen



figur 4: n = 4

ljusa: $n \cdot n = n^2$
mörka: 4 sidor med n och 4 hörn, $4n + 4$
↓
figur 5: $5^2 = 25$ ljusa och $4 \cdot 5 + 4 = 24$ mörka

figur 10: $10^2 = 100$ ljusa och $4 \cdot 10 + 4 = 44$ mörka

Kontroll med figur 3: $3^2 = 9$ och $4 \cdot 3 + 4 = 16$ ✓

Eleven ser de ljusa som en kvadrat med sidan n och de mörka som fyra sidor och fyra hörn.

Lösning C: tankevurpa

Figur 5: 25 ljusa och 24 mörka

Figur 10 är dubbelt så stor.

$2 \cdot 25 = 50$ och $2 \cdot 24 = 48$

Svar: 50 ljusa och 48 mörka.

Med dubbla sidan blir de ljusa fyra gånger så många, $10 \cdot 10 = 100$, och de mörka blir 44.

Fråga: ”Vad ger elevens sätt för figur 2, och vad visar bilden?”

Frågor om tankarna bakom

1. Vad gör eleven i lösning A från rad till rad i tabellen?
2. Varför delar eleven i lösning B de mörka i fyra sidor och fyra hörn?
3. Var syns det i båda lösningarna att de mörka blir fyra fler för varje figur?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja för figur 100, och varför?

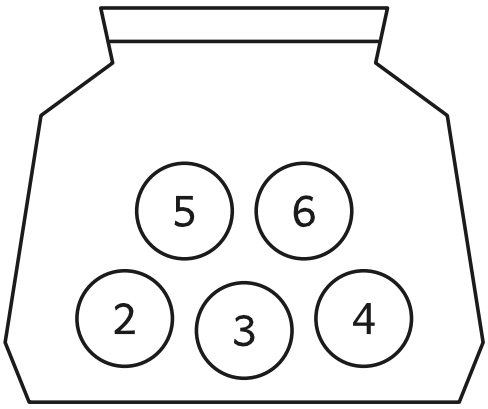
Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

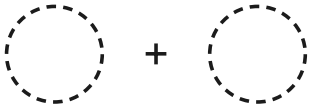
Idén kommer ur Hagland, Hedrén och Taflin (2005) och Lithner m.fl. (2025).

Udda eller jämnt

I en påse ligger fem kulor med talen 2, 3, 4, 5 och 6. Du drar två kulor samtidigt och lägger ihop talen. Blir summan ett jämnt tal vinner du. Blir summan ett udda tal vinner din kompis.



två kulor



jämn summa: du vinner
udda summa: kompisen vinner

Frågan

Är spelet rättvist? Visa hur ni vet.

LÖSNINGSFÖRSLAG · SANNOLIKHET OCH STATISTIK

UDDA ELLER JÄMNT

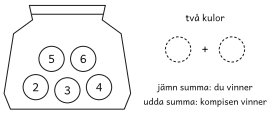
PROBLEMET

I en påse ligger fem kulor med talen 2, 3, 4, 5 och 6. Du drar två kulor samtidigt och lägger ihop talen. Blir summan ett jämnt tal vinner du. Blir summan ett udda tal vinner din kompis.

Är spelet rättvist? Visa hur ni vet.

Svaret: Nej, spelet är inte rättvist: 4 av 10 par ger jämn summa och 6 udda.

Kontroll: 2 + 4, 2 + 6, 4 + 6 och 3 + 5 är jämna, och (5 · 4) / 2 = 10 par.



IDÉN: *Jämn summa kommer från två jämna eller två udda kulor.*

LÖSNING A: LISTA ALLA TIO PAR

kulor	summa
2 + 3	5
2 + 4	6
2 + 5	7
2 + 6	8
3 + 4	7

kulor	summa
3 + 5	8
3 + 6	9
4 + 5	9
4 + 6	10
5 + 6	11

jämn: 4 par

udda: 6 par

Tillsammans 10 par. Jämnt i 4 av 10: inte rättvist.

Eleven skriver alla tio par i ordning med summan och ringar in de fyra jämna.

LÖSNING B: UDDA OCH JÄMNT

jämn + jämn = jämn
udda + udda = jämn
jämn + udda = udda

jämna kulor: 2, 4, 6
udda kulor: 3, 5

+	3	5
2	5	7
4	7	9
6	9	11

en jämn och en udda:
3 · 2 = 6 par, udda summa

två jämna: 3 par
två udda: 1 par

jämn summa: 3 + 1 = 4 par, udda: 6 par Inte rättvist.

Kontroll: 3 + 1 + 6 = 10 par ✓

Eleven delar kulorna i jämna och udda och räknar hur många par det blir av varje slag.

LÖSNING C: TANKEVURPA

En tabell med 5 · 5 = 25 rutor

Jämn summa i 13 rutor

Udda summa i 12 rutor

Svar: Jämnt vinner oftare.

Fem rutor har samma kula två gånger, som 2 + 2, och jämn summa. Utan dem är 8 av 20 jämna.

Fråga: ”Vilka par i tabellen går inte att dra?”

FRÅGOR OM TANKARNA BAKOM

1. Hur gör eleven i lösning A för att få med alla par?
2. Varför räknar eleven i lösning B 3 · 2 för en kula av varje slag?
3. Var syns de fyra paren med jämn summa i båda lösningarna?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 20 kulor, och varför?

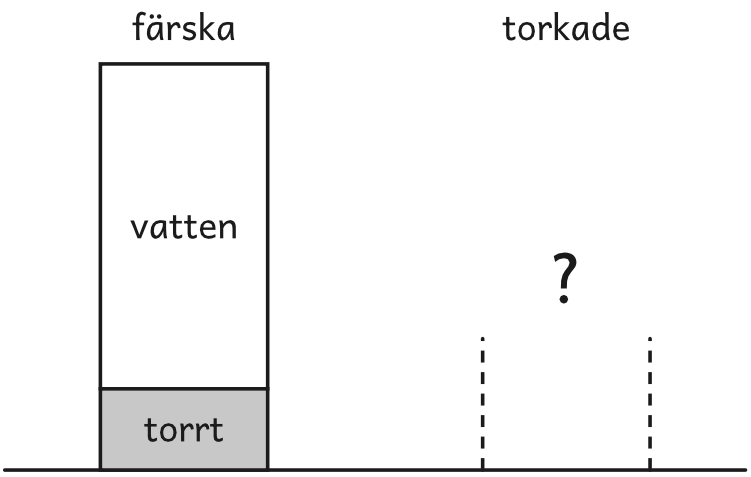
VISA OCH JÄMFÖR LÖSNINGAR

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur nrich, Odds and Evens.

Svamparna

Färska svampar består till 80 % av vatten. När svamparna torkar, försvinner en del av vattnet. Torkade svampar består till 20 % av vatten.



Frågan

Med hur många procent minskar vikten när svamparna torkas?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp/problem

Lösningsförslag · Samband och förändring

Svamparna

Problemet

Färska svampar består till 80 % av vatten. När svamparna torkar, försvinner en del av vattnet. Torkade svampar består till 20 % av vatten.

Med hur många procent minskar vikten när svamparna torkas?

Svaret: Vikten minskar med 75 %, så att en fjärdedel är kvar.
Kontroll: 100 g blir 25 g: 20 g torrt och 5 g vatten, och 5 av 25 är 20 %.



Idén: *Det torra väger lika mycket före och efter, och procenten räknas på olika helheter.*

Lösning A: börja med 100 g

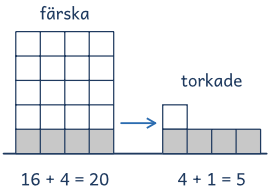
Om svamparna väger 100 g:
vatten 80 g och torrt 20 g
↓
Torkade: torrt 20 g är 80 %
↓
10 % är 20 / 8 = 2,5 g
↓
100 % är 2,5 · 10 = 25 g

---

100 − 25 = 75 g mindre, alltså 75 %
Kontroll: 25 − 20 = 5 g vatten, och 5 av 25 är 20 % ✓

Eleven tänker sig 100 g färska svampar och följer de 20 g torrt, som blir 80 % av de torkade.

Lösning B: staplar med rutor



Färska: 20 rutor,
4 torra är 20 %
↓
Torkade: 4 torra
är 80 %, 1 vatten
↓
5 av 20 rutor kvar,
en fjärdedel

Minskar med 75 %
Kontroll: 1 av 5 är 20 % ✓

Eleven ritar de färska som 20 rutor med 4 torra, och de 4 torra blir 80 % av de torkade.

Lösning C: tankevurpa

Vatten före: 80 %
Vatten efter: 20 %
80 − 20 = 60
Svar: Vikten minskar med 60 %.

80 % och 20 % räknas på olika helheter. Av 100 g blir 25 g kvar, och vikten minskar med 75 %.
Fråga: ”80 % av vad, och 20 % av vad?”

Frågor om tankarna bakom

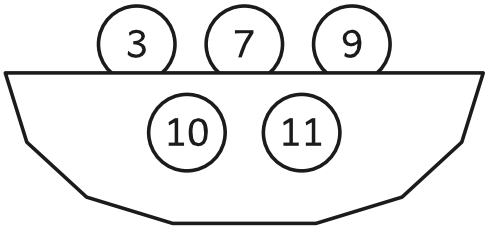
1. Vad gör eleven i lösning A med de 20 g som inte är vatten?
2. Varför är det 4 torra rutor i båda staplarna i lösning B?
3. Var syns det i båda lösningarna att det torra väger lika mycket före och efter?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om svamparna var 90 % vatten, och varför?

Visa och jämför lösningar

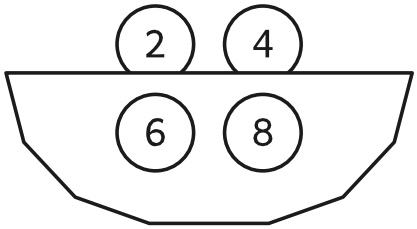
- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Skålarna

I en röd skål ligger fem bollar med talen 3, 7, 9, 10 och 11. I en blå skål ligger fyra bollar med talen 2, 4, 6 och 8. Du ska flytta en av bollarna i den röda skålen till den blå.



röd skål



blå skål

Frågan

Vilken boll ska du flytta för att medelvärdet ska bli större i båda skålarna?

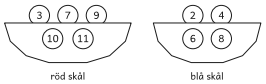
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp/problem

Lösningsförslag · Sannolikhet och statistik

Skålarna

Problemet

I en röd skål ligger fem bollar med talen 3, 7, 9, 10 och 11. I en blå skål ligger fyra bollar med talen 2, 4, 6 och 8. Du ska flytta en av bollarna i den röda skålen till den blå.



Vilken boll ska du flytta för att medelvärdet ska bli större i båda skålarna?

Svaret: Bollen 7. Medelvärdena blir 8,25 och 5,4.
Kontroll: Röd 8 blir 33 / 4 = 8,25, och blå 5 blir 27 / 5 = 5,4.

Idén: *Medelvärdet är en balanspunkt: bollen ska vara under det röda medelvärdet och över det blå.*

Lösning A: pröva varje boll

flytta	röd	blå
nu	40 / 5 = 8	20 / 4 = 5
3	9,25 ↑	4,6 ↓
7	8,25 ↑	5,4 ↑
9	7,75 ↓	5,8 ↑
10	7,5 ↓	6 ↑
11	7,25 ↓	6,2 ↑

Så räknade vi 7:

röd: 40 − 7 = 33
33 / 4 = 8,25

blå: 20 + 7 = 27
27 / 5 = 5,4

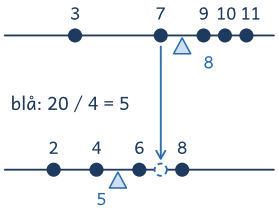
båda större ✓

↑ större
↓ mindre

Eleven räknar medelvärdena och prövar att flytta varje boll, och bara 7 gör båda större.

Lösning B: medelvärdet som balanspunkt

röd: 40 / 5 = 8



Ta bort en boll under 8: röd blir större.

Lägg till en boll över 5: blå blir större.

↓

Bara 7 ligger mellan 5 och 8.

Kontroll:
röd: 33 / 4 = 8,25
blå: 27 / 5 = 5,4 ✓

Eleven ser medelvärdena som balanspunkter och letar efter en boll mellan 5 och 8.

Lösning C: tankevurpa

Röd utan 3: 37 / 4 = 9,25

Blå med 3: 23 / 4 = 5,75

Båda blir större.

Svar: Bollen 3.

Eleven delar summan i den blå med 4, men där ligger 5 bollar: 23 / 5 = 4,6, mindre än 5.

Fråga: ”Hur många bollar ligger i den blå i elevens svar?”

Frågor om tankarna bakom

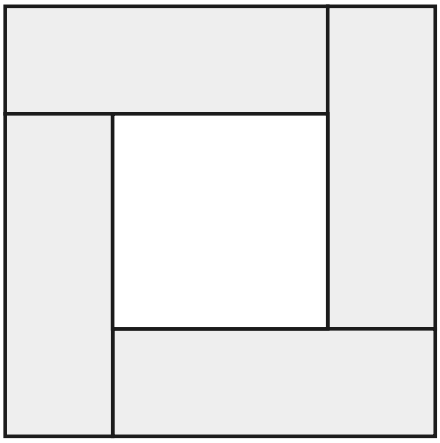
1. Vad gör eleven i lösning A med varje boll?
2. Varför ska bollen i lösning B vara mindre än 8 och större än 5?
3. Var syns det i båda lösningarna att bollen ska ligga mellan de två medelvärdena?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 50 bollar i varje skål, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Kvadraten

Fyra likadana rektanglar ligger runt en liten kvadrat. Rektanglarna och den lilla kvadraten bildar tillsammans en stor kvadrat, som på bilden. Varje rektangel har omkretsen 40 cm.



Frågan

Vilken area har den stora kvadraten?

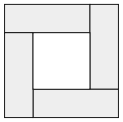
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp/problem

LÖSNINGSFÖRSLAG · GEOMETRI

KVADRATEN

PROBLEMET

Fyra likadana rektanglar ligger runt en liten kvadrat. Rektanglarna och den lilla kvadraten bildar tillsammans en stor kvadrat, som på bilden. Varje rektangel har omkretsen 40 cm.



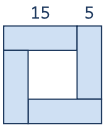
Vilken area har den stora kvadraten?

Svaret: 400 cm², vilken rektangel det än är.
Kontroll: 15 + 5 + 15 + 5 = 40, och 4 · 15 · 5 + 10 · 10 = 400 = 20 · 20.

IDÉN: *Den stora kvadratens sida är en lång och en kort sida, alltså halva omkretsen.*

LÖSNING A: OLIKA REKTANGLAR

lång	kort	omkrets	stora sidan	area
15	5	40	20	400
12	8	40	20	400
18	2	40	20	400

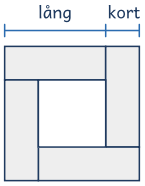


15 + 5 = 20

Så räknade vi första raden:
omkrets: 15 + 5 + 15 + 5 = 40
stora sidan: 15 + 5 = 20
area: 20 · 20 = 400 cm² ✓

Eleven prövar rektanglar med omkretsen 40 cm och ser att den stora kvadratens sida blir 20 varje gång.

LÖSNING B: HALVA OMKRETSEN



stora sidan = lång + kort

Omkretsen är 2 långa och 2 korta: 40 cm
↓
lång + kort = 40 / 2 = 20 cm
↓
stora sidan är 20 cm
↓
arean: 20 · 20 = 400 cm²

Kontroll med 15 och 5: 15 + 5 + 15 + 5 = 40 och 15 + 5 = 20 ✓

Eleven ser att den stora kvadratens sida, en lång och en kort, är halva omkretsen.

LÖSNING C: TANKEVURPA

15 + 5 + 15 + 5 = 40
15 · 5 = 75
4 · 75 = 300
Svar: 300 cm².

Eleven räknar bara rektanglarna. Den lilla kvadraten i mitten är 10 · 10 = 100 cm² till.
Fråga: ”Vilken del av bilden har eleven inte räknat?”

FRÅGOR OM TANKARNA BAKOM

1. Vad prövar eleven i lösning A, och vad händer med den stora kvadratens sida?
2. Varför delar eleven i lösning B omkretsen med 2?
3. Var syns det i båda lösningarna att den stora kvadratens sida är 20 cm?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om omkretsen var 46 cm, och varför?

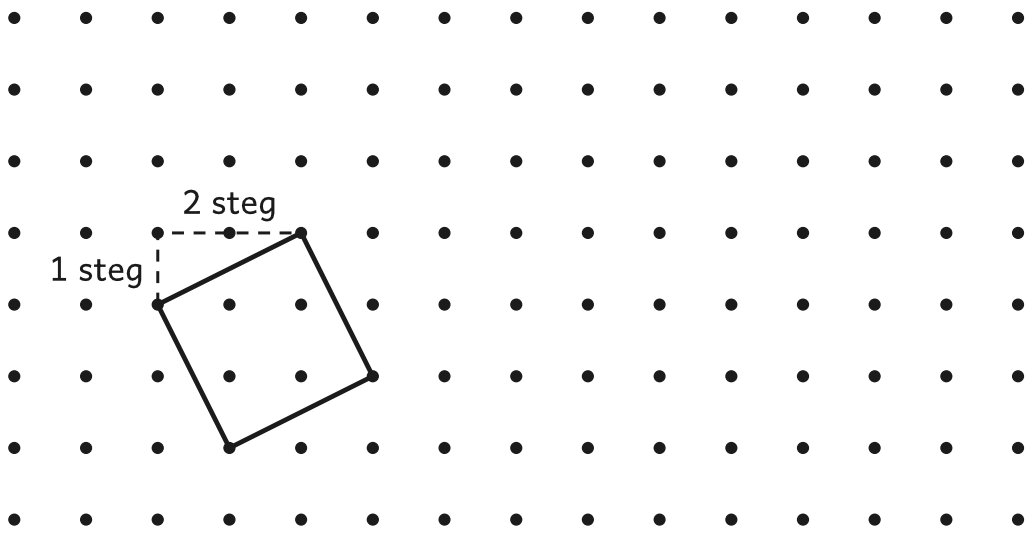
VISA OCH JÄMFÖR LÖSNINGAR

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Nämnaren 2014:4, Problemavdelningen nr 4123.

De lutande kvadraterna

På prickpapper går det att rita kvadrater som lutar. Kvadratens sida på bilden går 2 steg åt höger och 1 steg uppåt. Ni räknar arean i rutor, och en ruta är den minsta kvadraten mellan fyra prickar.



Frågorna

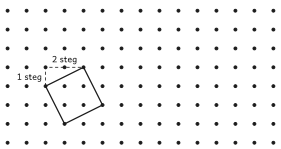
1. Vilken area har kvadraten på bilden?
2. Vilken area har en kvadrat vars sida går 3 steg åt höger och 2 steg uppåt? Finns det en regel?

LÖSNINGSFÖRSLAG · GEOMETRI

De lutande kvadraterna

Problemet

På prickpapper går det att rita kvadrater som lutar. Kvadratens sida på bilden går 2 steg åt höger och 1 steg uppåt. Ni räknar arean i rutor, och en ruta är den minsta kvadraten mellan fyra prickar.



Vilken area har kvadraten på bilden?

Vilken area har en kvadrat vars sida går 3 steg åt höger och 2 steg uppåt?

Finns det en regel?

Svaret: 5 rutor. Med 3 och 2 steg blir det 13, och arean är $a^2 + b^2$.
Kontroll: $3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 1 / 2 = 5$ och $5 \cdot 5 - 4 \cdot 3 \cdot 2 / 2 = 13 = 3^2 + 2^2$.

IDÉN: *Arean räknas i rutor genom att dela den lutande kvadraten, eller ramen runt den, i trianglar och kvadrater.*

Lösning A: en ram



ram: $3 \cdot 3 = 9$
en triangel: $2 \cdot 1 / 2 = 1$
fyra trianglar: $4 \cdot 1 = 4$
$9 - 4 = 5$ rutor



ram: $5 \cdot 5 = 25$
en triangel: $3 \cdot 2 / 2 = 3$
fyra trianglar: $4 \cdot 3 = 12$
$25 - 12 = 13$ rutor ✓

Eleven ritar en kvadrat runt den som lutar och tar bort de fyra trianglarna i hörnen.

Lösning B: dela upp kvadraterna

a: åt höger	b: uppåt	area	$a^2 + b^2$
1	1	2	1 + 1
2	1	5	4 + 1
3	1	10	9 + 1
2	2	8	4 + 4
3	2	13	9 + 4



$1 + 4 \cdot 1 = 5$

fyra trianglar och en liten kvadrat

arean = $a^2 + b^2$ 3 och 2: $3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$
Kontroll: $2^2 + 1^2 = 5$, som rutorna ✓

Eleven delar kvadraterna i fyra trianglar och en liten kvadrat, för in areorna i en tabell och ser $a^2 + b^2$.

Lösning C: tankevurpa

Sidan: 2 + 1 = 3 steg

3 · 3 = 9

Svar: 9 rutor.

Sidan lutar och är kortare än 3 steg. 3 · 3 = 9 är ramen runt kvadraten, med trianglarna i hörnen.

Fråga: ”Vad räknar 3 · 3 = 9 på bilden?”

Frågor om tankarna bakom

1. Vad gör eleven i lösning A med ramen och trianglarna?
2. Hur ser eleven i lösning B regeln i tabellen?
3. Var syns det i båda lösningarna att kvadraten med 3 och 2 steg har arean 13?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 7 och 4 steg, och varför?

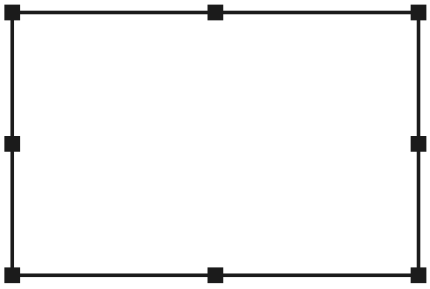
Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

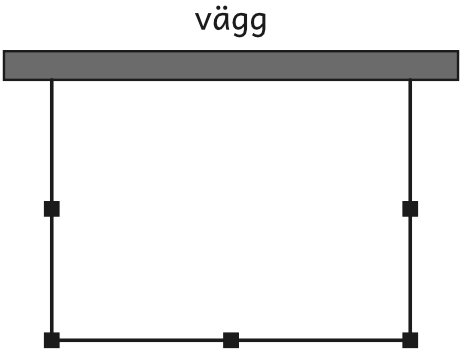
Idén kommer ur nrich, Tilted Squares.

Staketet

Ni har 60 m staket till en rektangulär hage för getter. Hagen ska bli så stor som möjligt. Sedan bygger ni hagen mot en lång vägg i stället, så att väggen blir en sida och staketet räcker till de tre andra.



staket runt om



staket på tre sidor

Frågorna

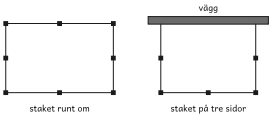
1. Vilka mått ger den största hagen med staket runt om, och hur stor blir den?
2. Vilka mått ger den största hagen mot väggen, och hur stor blir den?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp/problem

Staketet

Problemet

Ni har 60 m staket till en rektangulär hage för getter. Hagen ska bli så stor som möjligt. Sedan bygger ni hagen mot en lång vägg i stället, så att väggen blir en sida och staketet räcker till de tre andra.



Vilka mått ger den största hagen med staket runt om, och hur stor blir den?

Vilka mått ger den största hagen mot väggen, och hur stor blir den?

Svaret: Runt om 15 · 15 = 225 m². Mot väggen 15 · 30 = 450 m², 30 längs väggen.
Kontroll: Staketet: 4 · 15 = 60, och mot väggen 2 · 15 + 30 = 60.

Idén: *Arean blir störst i mitten, där talen i tabellen vänder.*

Lösning A: pröva olika bredder

fyra sidor

bredd	längd	area
5	25	125
10	20	200
14	16	224
15	15	225
16	14	224

störst: 15 · 15 = 225 m²
Kontroll: 15 + 15 + 15 + 15 = 60

mot väggen

bredd	längd	area
12	36	432
14	32	448
15	30	450
16	28	448
18	24	432

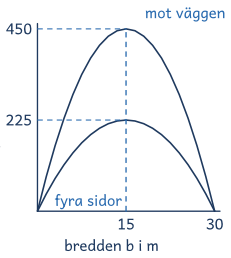
störst: 15 · 30 = 450 m²
Kontroll: 15 + 30 + 15 = 60 ✓

Eleven prövar bredder i två tabeller och ser att arean minskar på båda sidor om 15 m.

Lösning B: uttryck och graf

fyra sidor:
Arean = b · (30 − b)
lika stor för b och 30 − b,
så toppen är mitt emellan:
15 · 15 = 225 m²
14 · 16 = 224 och 13 · 17 = 221

mot väggen:
Arean = b · (60 − 2b)
= 2 · b · (30 − b)
toppen i 15: 15 · 30 = 450 m²
Kontroll: 15 + 30 + 15 = 60 ✓



Eleven skriver arean som b · (30 − b) och ser i grafen att den är störst vid 15.

Lösning C: tankevurpa

Runt om: 15 · 15 = 225

Mot väggen: 20 + 20 + 20 = 60

20 · 20 = 400

Svar: 225 m² och 400 m².

Runt om stämmer, men kvadraten är inte störst mot väggen: 15 · 30 = 450 m² är mer.
Fråga: ”Hur kan ni pröva om 20 och 20 m är bäst?”

Frågor om tankarna bakom

1. Vad gör eleven i lösning A, och hur vet eleven att 15 är bäst?
2. Varför är arean mot väggen dubbelt så stor som runt om i lösning B?
3. Var syns det i båda lösningarna att arean är störst när bredden är 15 m?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 50 m staket, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Alla summor

Talet 3 kan skrivas som en summa av positiva heltal på fyra sätt, när ordningen räknas: 3, 2 + 1, 1 + 2 och 1 + 1 + 1. Talet själv räknas också som ett sätt.

3



2 + 1



1 + 2



1 + 1 + 1



Frågorna

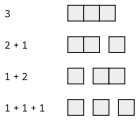
1. På hur många sätt kan talen 4 och 5 skrivas så?
2. På hur många sätt kan 10 skrivas så? Förklara hur ni vet.

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp/problem

Alla summor

Problemet

Talet 3 kan skrivas som en summa av positiva heltal på fyra sätt, när ordningen räknas: 3, 2 + 1, 1 + 2 och 1 + 1 + 1. Talet själv räknas också som ett sätt.



På hur många sätt kan talen 4 och 5 skrivas så?

På hur många sätt kan 10 skrivas så? Förklara hur ni vet.

Svaret: 4 på 8 sätt, 5 på 16 och 10 på 512, eftersom antalet fördubblas.
Kontroll: 1 + 3 + 3 + 1 = 8 och 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16, och 16 · 32 = 512.

Idén: *Antalet sätt fördubblas när talet ökar med 1.*

Lösning A: ordna efter antalet tal

1 tal: 4
2 tal: 3 + 1 1 + 3 2 + 2
3 tal: 2 + 1 + 1 1 + 2 + 1 1 + 1 + 2
4 tal: 1 + 1 + 1 + 1
1 + 3 + 3 + 1 = 8 sätt ✓

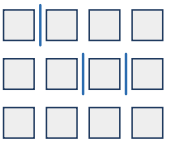
tal	sätt
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16

Antalet fördubblas för varje tal:
10: 16 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 = 512 sätt

Eleven listar sätten ordnade efter hur många tal summan har och ser att antalet fördubblas.

Lösning B: klossar på rad

4 klossar, 3 luckor:



1 + 3
2 + 1 + 1
4

Varje lucka: avdelare eller inte, alltså 2 val
↓
2 · 2 · 2 = 8 sätt

10 klossar har 9 luckor:
2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 = 512 sätt
Kontroll: 3 har 2 luckor, 2 · 2 = 4 sätt ✓

Eleven lägger klossar på rad och ser att varje lucka mellan dem får en avdelare eller inte.

Lösning C: tankevurpa

4, 3 + 1, 2 + 2
2 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1
Svar: 4 kan skrivas på 5 sätt.

Ordningen räknas, så 1 + 3, 1 + 2 + 1 och 1 + 1 + 2 saknas: 5 + 3 = 8.
Fråga: ”Hur visar problemet att ordningen räknas?”

Frågor om tankarna bakom

1. Hur ordnar eleven listan i lösning A så att inget sätt fattas?
2. Varför ger varje lucka två val i lösning B?
3. Var syns det i båda lösningarna att antalet fördubblas?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja för talet 20, och varför?

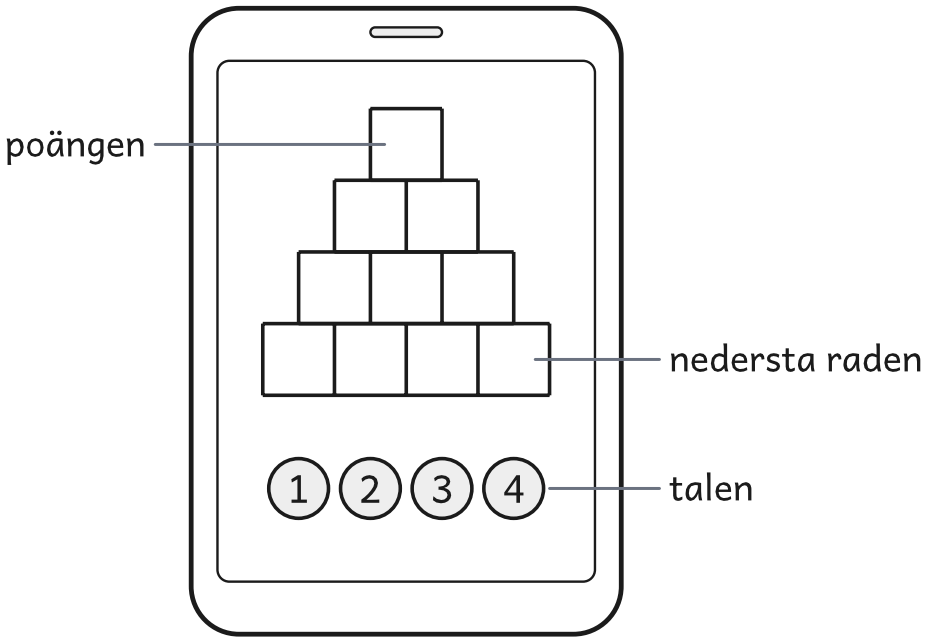
Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Problembanken åk 7–9, problem 15.

Pyramidspelet

Mobilspelet Pyramiden har fyra rader med rutor, som på bilden. Man drar talen 1, 2, 3 och 4 till var sin ruta i den nedersta raden, i vilken ordning man vill. Varje ruta ovanför får summan av de två talen under den. Talet överst är poängen.



Frågorna

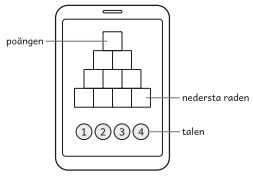
1. Vilka poäng kan man få? Hitta alla.
2. Hur ska talen stå för att ge flest poäng? Förklara varför.

LÖSNINGSFÖRSLAG · ALGEBRA

PYRAMIDSPELET

PROBLEMET

Mobilspelet Pyramiden har fyra rader med rutor, som på bilden. Man drar talen 1, 2, 3 och 4 till var sin ruta i den nedersta raden, i vilken ordning man vill. Varje ruta ovanför får summan av de två talen under den. Talet överst är poängen.



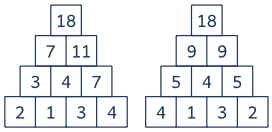
Vilka poäng kan man få? Hitta alla.

Hur ska talen stå för att ge flest poäng? Förklara varför.

Svaret: 16, 18, 20, 22 eller 24 poäng. Flest, 24, med 3 och 4 i mitten.
Kontroll: 1 3 4 2 ger 4 7 6, sedan 11 och 13 och sist 24. 3 1 2 4 ger 16.

IDÉN: *Talen i mitten räknas tre gånger och talen ytterst en gång, så paret i mitten avgör poängen.*

LÖSNING A: BYTA PLATS PÅ TALEN



Byt ytterst: samma.

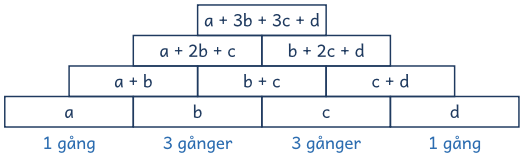
Byt plats på 1 och 4:
2 4 3 1 → 6 7 4 → 13 11 → 24
↓
Paret i mitten avgör poängen.

mitten	ytterst	poäng
1 och 2	3 och 4	16
1 och 3	2 och 4	18
1 och 4	2 och 3	20
2 och 3	1 och 4	20
2 och 4	1 och 3	22
3 och 4	1 och 2	24

16, 18, 20, 22 eller 24
Flest: 3 och 4 i mitten ✓

Eleven räknar ut några pyramider, ser att bara paret i mitten avgör poängen och prövar alla sex par.

LÖSNING B: POÄNGEN MED BOKSTÄVER



$a + b + c + d = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$
$a + 3b + 3c + d = 10 + 2b + 2c = 10 + 2 \cdot (b + c)$
$b + c$ kan vara 3, 4, 5, 6 eller 7
Poäng: 16, 18, 20, 22 eller 24
Flest: $10 + 2 \cdot 7 = 24$, med 3 och 4 i mitten ✓

Eleven kallar talen a, b, c och d och räknar fram poängen a + 3b + 3c + d.

LÖSNING C: TANKEVURPA

1 2 3 4 → 3 5 7 → 8 12 → 20

4 3 2 1 ger också 20.

Svar: alltid 20 poäng.

Eleven prövar bara två ordningar, och båda har 2 och 3 i mitten. Många andra ordningar ger andra poäng.

Fråga: ”Hur kan ni pröva elevens svar i spelet?”

FRÅGOR OM TANKARNA BAKOM

1. Vad upptäcker eleven i lösning A när hen byter plats på talen ytterst?
2. Varför kan eleven i lösning B skriva poängen som $10 + 2 \cdot (b + c)$?
3. Var syns det i båda lösningarna att bara paret i mitten avgör poängen?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken väljer ni med talen 1 till 5 och fem rader?

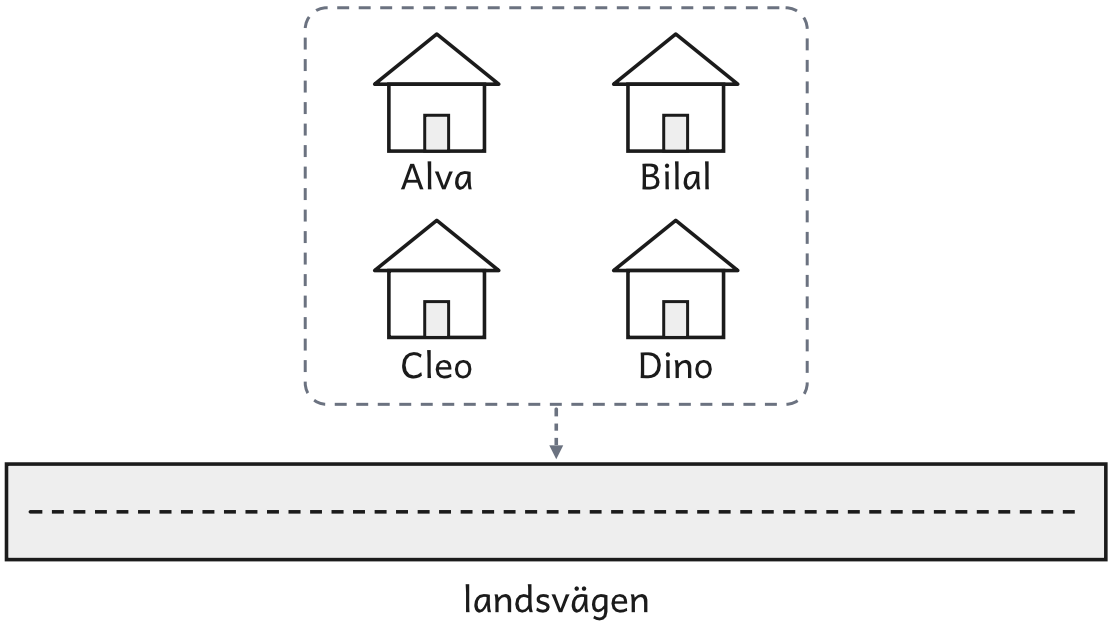
VISA OCH JÄMFÖR LÖSNINGAR

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur nrich, Number Pyramids.

Kompisarna längs vägen

Alva, Bilal, Cleo och Dino bor i var sitt hus längs samma raka landsväg. Alva bor 8 km från Cleo, Bilal bor 5 km från Dino, och Bilal bor 2 km från Cleo. Vi vet inte i vilken ordning husen ligger längs vägen.



Frågorna

1. Hur långt kan det vara mellan Alva och Dino? Hitta alla avstånd som är möjliga.
2. Hur vet ni att ni har hittat alla?

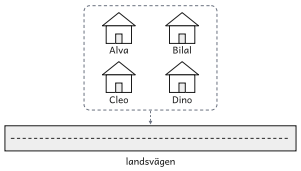
Idén kommer ur Känguru 2022, Cadet nr 18.

Lösningsförslag · Taluppfattning

Kompisarna längs vägen

Problemet

Alva, Bilal, Cleo och Dino bor i var sitt hus längs samma raka landsväg. Alva bor 8 km från Cleo, Bilal bor 5 km från Dino, och Bilal bor 2 km från Cleo. Vi vet inte i vilken ordning husen ligger längs vägen.
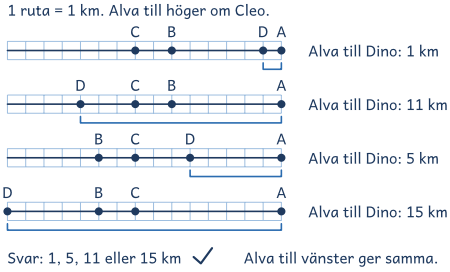


Hur långt kan det vara mellan Alva och Dino? Hitta alla avstånd som är möjliga.

Hur vet ni att ni har hittat alla?

Svaret: 1, 5, 11 eller 15 km. Bilal har 2 lägen och Dino 2 för varje.
Kontroll: Ordningen C B D A ger 1 km, D C B A 11, B C D A 5 och D B C A 15.

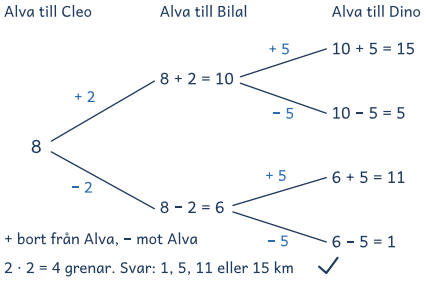
Idén: *Bilal kan bo till höger eller vänster om Cleo, och Dino till höger eller vänster om Bilal.*

Lösning A: rita på rutpapper



Eleven ritar på rutpapper med en ruta per km, prövar alla lägen och räknar rutorna.

Lösning B: plus eller minus



Eleven går från Alva via Cleo och Bilal till Dino och väljer plus eller minus för de två sista sträckorna.

Lösning C: tankevurpa

Bilal bor mellan Cleo och Alva.

Dino närmare Alva: 8 − 2 − 5 = 1

Dino längre bort: 8 − 2 + 5 = 11

Svar: bara 1 eller 11 km.

Eleven låter Dino bo på båda sidor om Bilal, men Bilal bara på en sida om Cleo.

Fråga: ”Hur långt kan det vara mellan Alva och Bilal?”

Frågor om tankarna bakom

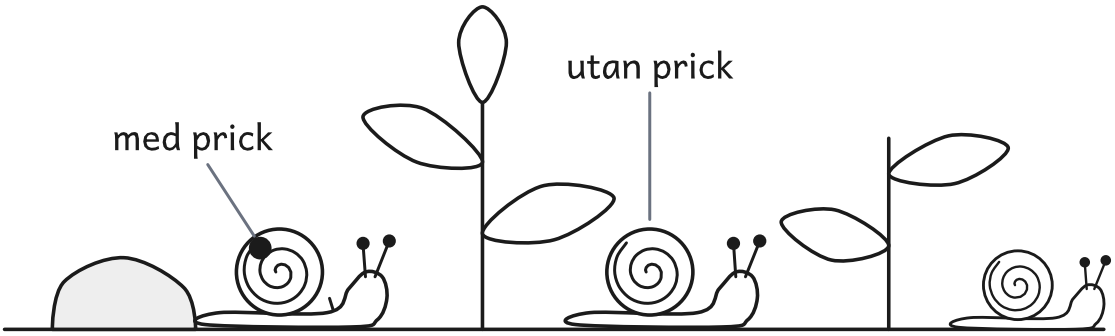
1. Hur prövar eleven i lösning A var Bilal och Dino kan bo?
2. I lösning B står det 8 − 2 = 6. Vad betyder minustecknet där?
3. Var syns det i båda lösningarna att Bilal och Dino kan bo på ena eller andra sidan?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om en femte kompis också bodde längs vägen?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Snäckorna i trädgården

En klass vill veta hur många snäckor det finns i skolans trädgård. Eleverna samlar 27 snäckor, målar en prick på skalet och släpper ut dem igen. Två dagar senare, när snäckorna har blandat sig, samlar eleverna 50 snäckor. Av dem har 10 en prick.



Frågorna

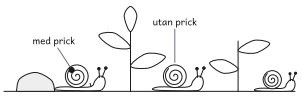
1. Ungefär hur många snäckor finns det i trädgården?
2. Vad blir svaret om 9 av de 50 har en prick?

LÖSNINGSFÖRSLAG · SANNOLIKHET OCH STATISTIK

SNÄCKORNA I TRÄDGÅRDEN

PROBLEMET

En klass vill veta hur många snäckor det finns i skolans trädgård. Eleverna samlar 27 snäckor, målar en prick på skalet och släpper ut dem igen. Två dagar senare, när snäckorna har blandat sig, samlar eleverna 50 snäckor. Av dem har 10 en prick.



Ungefär hur många snäckor finns det i trädgården?

Vad blir svaret om 9 av de 50 har en prick?

Svaret: Ungefär 135 snäckor. Om 9 av de 50 har en prick blir det ungefär 150.
Kontroll: 27/135 = 10/50 = 1/5 och 27/150 = 9/50.

IDÉN: *Andelen med prick är ungefär lika stor bland de 50 som bland alla snäckor i trädgården.*

LÖSNING A: BYGGA UPP 27

med prick	alla	
10	50	från 10 och 50:
20	100	· 2
5	25	/ 2
2	10	/ 5
27	135	

27 = 20 + 5 + 2
↓
100 + 25 + 10 = 135

9 av 50 har prick:
27 = 3 · 9
↓
alla: 3 · 50 = 150

Ungefär 135 snäckor,
och ungefär 150 med 9 prickar. ✓

Eleven börjar tabellen med att 10 av 50 har prick och bygger upp 27 som 20 + 5 + 2.

LÖSNING B: ANDELEN MED PRICK

10 av 50 har prick: 10 / 50 = 1/5
Vi uppskattar att ungefär 1/5 av alla har prick.



alla ≈ 5 · 27 = 135

Med 9 prickar uppskattar vi andelen till 9/50.
↓
alla ≈ 27 · 50 / 9 = 150

Kontroll: 27 / 135 = 1/5 och 27 / 150 = 9/50 ✓

Eleven antar att andelen med prick är ungefär densamma i trädgården som bland de 50.

LÖSNING C: TANKEVURPA

50 − 10 = 40 utan prick
40 / 10 = 4, och 27 · 4 = 108
Med 9: 27 / 9 = 3, 3 · 41 = 123
Svar: 108 och 123 snäckor.

Eleven räknar bara ut snäckorna utan prick och glömmer de 27 med prick.
Fråga: ”Om det bara finns 108 snäckor, hur stor del av dem har en prick?”

FRÅGOR OM TANKARNA BAKOM

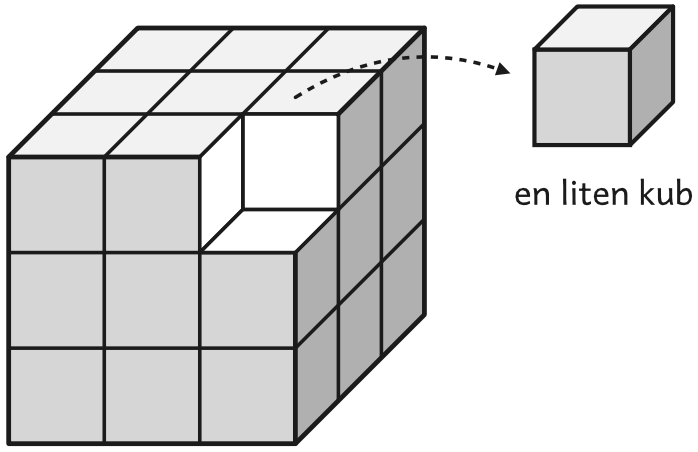
1. Hur bygger eleven i lösning A upp 27 med prick i tabellen?
2. Varför kan eleven i lösning B säga att 27 är ungefär en femtedel av alla?
3. Var syns det i båda lösningarna att ungefär var femte snäcka har en prick?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vad måste gälla för snäckorna för att svaret ska bli rimligt?

VISA OCH JÄMFÖR LÖSNINGAR

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Rubiks kub

Tänk er en Rubiks kub som är byggd av 27 små kuber, 3 åt varje håll. Varje sida av den stora kuben har sin färg, så en liten kub har färg på de sidor som syns utåt.



den stora kuben

Frågorna

1. Hur många små kuber har färg på 3 sidor, på 2, på 1 och på 0 sidor?
2. Hur blir det om kuben är 10 små kuber åt varje håll?

Idén kommer ur nrich, Painted Cube.

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp/problem

LÖSNINGSFÖRSLAG · GEOMETRI

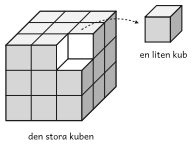
RUBIKS KUB

PROBLEMET

Tänk er en Rubiks kub som är byggd av 27 små kuber, 3 åt varje håll. Varje sida av den stora kuben har sin färg, så en liten kub har färg på de sidor som syns utåt.

Hur många små kuber har färg på 3 sidor, på 2, på 1 och på 0 sidor?

Hur blir det om kuben är 10 små kuber åt varje håll?



Svaret: 27 kuber: 8, 12, 6 och 1. 1 000 kuber: 8, 96, 384 och 512.
Kontroll: 8 + 12 + 6 + 1 = 27 och 8 + 96 + 384 + 512 = 1 000.

IDÉN: *Var en liten kub sitter avgör hur många sidor med färg den har.*

LÖSNING A: RÄKNA LAGER FÖR LAGER

överst		
3	2	3
2	1	2
3	2	3

mitten		
2	1	2
1	0	1
2	1	2

understa		
3	2	3
2	1	2
3	2	3

3 sidor: 4 + 4 = 8
2 sidor: 4 + 4 + 4 = 12
1 sida: 1 + 4 + 1 = 6
0 sidor: 1

10 åt varje håll: varje lager har 4 hörnrutor,
4 · 8 = 32 rutor längs kanten och 8 · 8 = 64 inne.

	3 sidor	2 sidor	1 sida	0 sidor
överst och underst	4 + 4	32 + 32	64 + 64	0
8 lager i mitten	0	8 · 4	8 · 32	8 · 64
alla	8	96	384	512

Eleven skriver i varje ruta hur många sidor med färg den lilla kuben har och lägger ihop lagren.

LÖSNING B: RÄKNA HÖRN OCH KANTER

platsen	sidor	3 åt varje håll	10 åt varje håll
hörn	3	8	8
kanter	2	12 · 1 = 12	12 · 8 = 96
mitt på sidorna	1	6 · 1 = 6	6 · 8 · 8 = 384
inuti	0	1	8 · 8 · 8 = 512
alla		27	1 000

En kant har 10 − 2 = 8 kuber mellan hörnen.
Kontroll: 8 + 96 + 384 + 512 = 1 000 ✓

Eleven räknar kuberna i hörnen, på kanterna, mitt på sidorna och inuti, med 10 − 2 = 8 per kant.

LÖSNING C: TANKEVURPA

6 sidor med 4 hörn: 6 · 4 = 24
6 sidor med 4 kanter: 6 · 4 = 24
6 · 1 = 6 mitt på, 1 inuti
Svar: 24, 24, 6 och 1.

Eleven räknar sida för sida, så hörnkuberna räknas tre gånger och kantkuberna två gånger.
Fråga: ”Hur många små kuber blir det i allt med elevens svar?”

FRÅGOR OM TANKARNA BAKOM

1. Vad skriver eleven i rutorna i lösning A, och hur lägger hen ihop lagren?
2. Varför räknar eleven i lösning B med 10 − 2 = 8 kuber längs en kant?
3. Var syns hörnen, kanterna och mitten på sidorna i båda lösningarna?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja för en kub som är 100 åt varje håll?

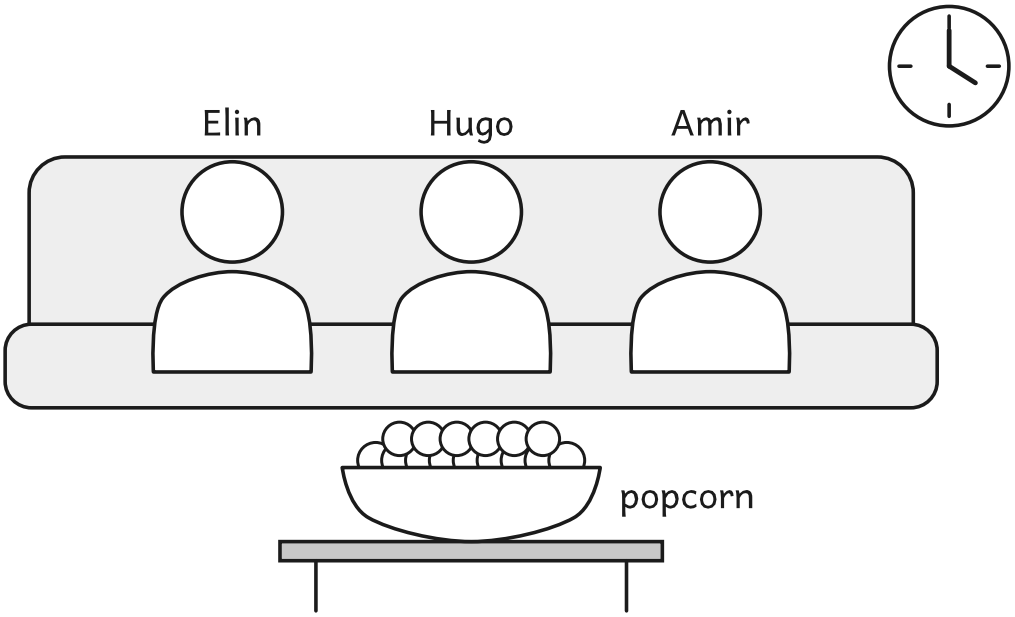
VISA OCH JÄMFÖR LÖSNINGAR

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur nrich, Painted Cube.

Popcornskålen

Elin, Hugo och Amir har filmkväll med en stor skål popcorn. Ensam äter Elin upp en sådan skål på 15 minuter, Hugo på 30 och Amir på 20 minuter. Var och en äter i samma takt hela tiden.



Frågorna

1. Hur lång tid tar det för Elin och Hugo att äta upp en skål ihop?
2. Och för alla tre ihop?

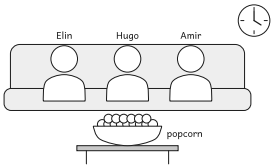
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp/problem

Lösningsförslag · Taluppfattning

Popcornskålen

Problemet

Elin, Hugo och Amir har filmkväll med en stor skål popcorn. Ensam äter Elin upp en sådan skål på 15 minuter, Hugo på 30 och Amir på 20 minuter. Var och en äter i samma takt hela tiden.



Hur lång tid tar det för Elin och Hugo att äta upp en skål ihop?

Och för alla tre ihop?

Svaret: Elin och Hugo 10 minuter, alla tre 6 minuter och 40 sekunder.
Kontroll: 10 min: 2/3 + 1/3 = 1. 400 s: 4/9 + 2/9 + 3/9 = 1.

Idén: *Det som var och en äter på samma tid går att lägga ihop.*

Lösning A: skålar på en timme

Hur många skålar hinner var och en på 60 minuter?

	en skål	på 60 minuter
Elin	15 min	60 / 15 = 4 skålar
Hugo	30 min	60 / 30 = 2 skålar
Amir	20 min	60 / 20 = 3 skålar

Elin och Hugo: 4 + 2 = 6 skålar på 60 min
60 / 6 = 10 min för en skål ✓

Alla tre: 4 + 2 + 3 = 9 skålar på 60 min
60 min = 3 600 s och 3 600 / 9 = 400 s
400 s = 6 min 40 s för en skål ✓

Eleven räknar hur många skålar var och en hinner äta på 60 minuter och lägger ihop dem.

Lösning B: en ekvation för tiden

t = tiden i minuter. På t minuter äter
Elin t/15 av skålen, Hugo t/30 och Amir t/20.

Elin och Hugo:
t/15 + t/30 = 1
2t + t = 30 · 30
3t = 30
t = 10 min ✓

Alla tre:
t/15 + t/30 + t/20 = 1
4t + 2t + 3t = 60 · 60
9t = 60
t = 60 / 9 = 20 / 3
20 / 3 min = 6 min 40 s ✓

Kontroll: 10/15 + 10/30 = 2/3 + 1/3 = 1 skål

Eleven kallar tiden t och skriver hur stor del av skålen var och en äter på t minuter.

Lösning C: tankevurpa

(15 + 30) / 2 = 22,5

(15 + 30 + 20) / 3 är cirka 21,7

Svar: 22,5 min och 21,7 min.

Eleven tar medelvärdet av tiderna. Elin och Hugo blir klara fortare ihop än Elin ensam.

Fråga: ”Hur många skålar hinner Elin äta ensam på elevens 22,5 minuter?”

Frågor om tankarna bakom

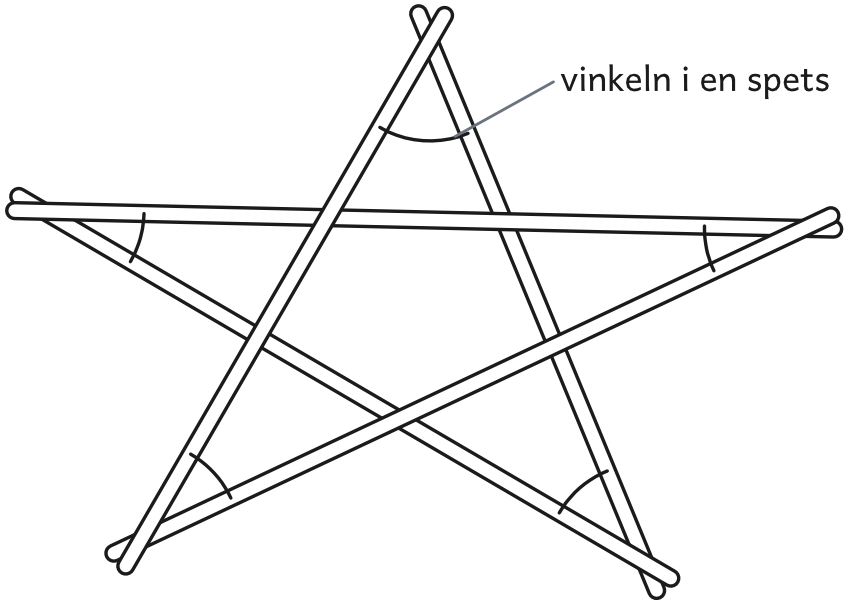
1. Varför räknar eleven i lösning A med 60 minuter?
2. Vad betyder t/15 i ekvationen i lösning B?
3. Var lägger eleverna i båda lösningarna ihop det som var och en äter?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om en fjärde kompis åt en skål på 12 minuter?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Pinnstjärnan

Nora limmar ihop fem raka pinnar till en stjärna med fem spetsar, som på bilden. Varje pinne går genom två av spetsarna. Vinklarna i spetsarna blir inte lika stora, och kompisarnas stjärnor ser lite olika ut.



Frågorna

1. Hur stor är summan av vinklarna i de fem spetsarna?
2. Rita av stjärnan på papper. Undersök vinkelsumman genom att mäta vinklarna eller klippa ut spetsarna. Förklara sedan varför den blir densamma i alla sådana stjärnor.

Idén kommer ur Nämnaren 2024:2, Nilsson, ”Dialoger om problemlösning”.

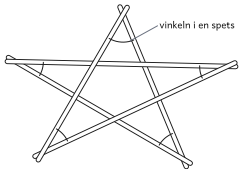
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp/problem

Lösningsförslag · Geometri

Pinnstjärnan

Problemet

Nora limmar ihop fem raka pinnar till en stjärna med fem spetsar, som på bilden. Varje pinne går genom två av spetsarna. Vinklarna i spetsarna blir inte lika stora, och kompisarnas stjärnor ser lite olika ut.



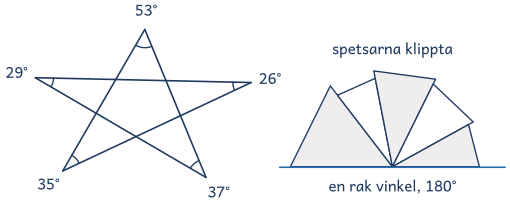
Hur stor är summan av vinklarna i de fem spetsarna?

Rita av stjärnan på papper. Undersök vinkelsumman genom att mäta vinklarna eller klippa ut spetsarna. Förklara sedan varför den blir densamma i alla sådana stjärnor.

Svaret: 180°, i alla stjärnor av fem raka pinnar.
Kontroll: En regelbunden stjärna har 36° i varje spets: 5 · 36° = 180°.

Idén: *Spetsarnas vinklar går att samla på en rak linje eller i en triangel, och båda ger 180°.*

Lösning A: mäta och klippa

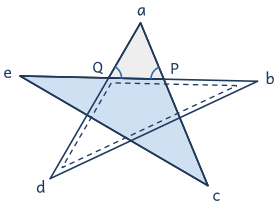


53 + 26 + 37 + 35 + 29 = 180°

En mätning kan bli någon grad fel. Summan: 180° ✓

Eleven mäter vinklarna i spetsarna och får summan ungefär 180°. De klippta spetsarna fyller en rak vinkel, 180°.

Lösning B: vinklarna i en triangel



I den blå triangeln c P e är yttervinkeln vid P lika stor som c + e.

I den streckade triangeln b Q d är yttervinkeln vid Q lika stor som b + d.

↓

Den grå triangeln a P Q har vinklarna a, c + e och b + d.

a + (c + e) + (b + d) = 180° ✓

Eleven samlar spetsarnas vinklar i en triangel med yttervinkelsatsen, och triangelns vinkelsumma är 180°.

Lösning C: tankevurpa

5 spetsar, som en femhörning

(5 − 2) · 180° = 540°

Svar: 540°.

Eleven räknar spetsarna som hörnen i en femhörning, men 540° är vinkelsumman i femhörningen mitt i stjärnan.

Fråga: ”Hur stor blir en spets i genomsnitt med elevens svar?”

Frågor om tankarna bakom

1. Hur får eleven i lösning A fram summan, och hur säker kan hen vara på den?
2. Varför är yttervinkeln vid P lika stor som c + e i lösning B?
3. Var samlar eleverna spetsarnas vinklar i båda lösningarna?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken visar att det gäller i alla stjärnor, och varför?

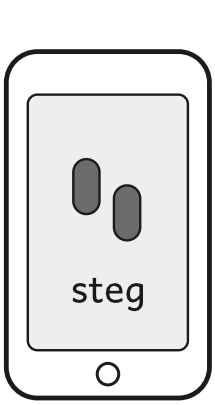
Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

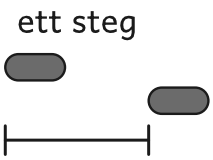
Idén kommer ur Nämnaren 2024:2, Nilsson, ”Dialoger om problemlösning”.

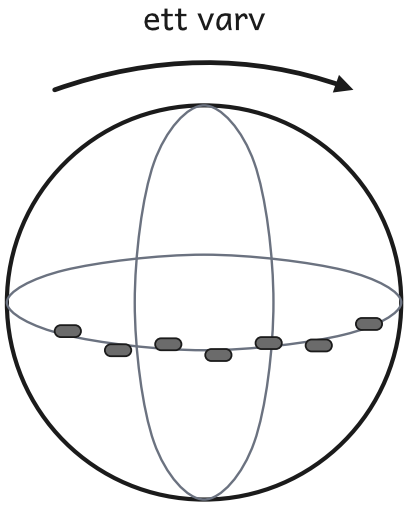
Stegtävlingen

Klass 8B har 25 elever och är med i en stegtävling. Alla elevernas steg läggs ihop till en sträcka. Jorden är 40 000 km runt. Bestäm själva hur långt ett steg är och hur många steg varje elev tar om dagen.



stegräknaren





jorden

Frågan

Hur många dagar kan det ta för klassen att gå ett varv runt jorden?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp/problem

Lösningsförslag · Taluppfattning

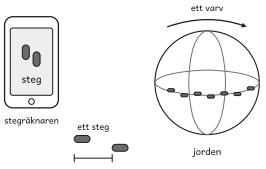
Stegtävlingen

Problemet

Klass 8B har 25 elever och är med i en stegtävling. Alla elevernas steg läggs ihop till en sträcka. Jorden är 40 000 km runt. Bestäm själva hur långt ett steg är och hur många steg varje elev tar om dagen.

Hur många dagar kan det ta för klassen att gå ett varv runt jorden?

Svaret: Omkring 230–485 dagar, om eleverna tar 6 000–10 000 steg om dagen på 55–70 cm.
Kontroll: 10 000 steg på 70 cm ger 228,6 dagar, och 6 000 steg på 55 cm 484,8.



Idén: *Antalet dagar är varvet delat med klassens sträcka på en dag, när båda står i samma enhet.*

Lösning A: Börja med en elev

Vi väljer 8 000 steg om dagen och 60 cm per steg.

En elev: 8 000 · 60 = 480 000 cm
↓
480 000 cm = 4 800 m = 4,8 km
↓
Klassen: 25 · 4,8 = 120 km om dagen
↓
Ett varv: 40 000 / 120 ≈ 333 dagar ✓

Kontroll: 120 · 333 = 39 960 och 120 · 334 = 40 080

Eleven antar 8 000 steg på 60 cm, räknar ut en elevs dagssträcka i km och multiplicerar med 25.

Lösning B: Räkna i steg

Vi väljer 8 000 steg om dagen och 60 cm per steg.

Ett varv: 40 000 km = 4 000 000 000 cm
↓
4 000 000 000 / 60 ≈ 66 666 667 steg
Klassen: 25 · 8 000 = 200 000 steg om dagen
↓
66 666 667 / 200 000 ≈ 333 dagar ✓

Med 10 000 steg: 250 000 steg om dagen och ungefär 267 dagar.

Eleven räknar ut hur många steg ett varv är och delar med klassens steg på en dag.

Lösning C: Tankevurpa

En elev: 8 000 · 60 = 480 000 cm
480 000 / 1 000 = 480 km
Klassen: 25 · 480 = 12 000 km
Svar: drygt 3 dagar.

Eleven delar med 1 000 för att gå från cm till km, och 1 km är 100 000 cm.
Fråga: ”Hur långt går en elev på en dag enligt räkningen?”

Frågor om tankarna bakom

1. Hur får eleven i lösning A fram hur långt klassen går på en dag?
2. Varför räknar eleven i lösning B om varvet till steg?
3. Var i båda lösningarna delar eleverna en sträcka med en dags sträcka?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om hela skolan var med, och varför?

Visa och jämför lösningar

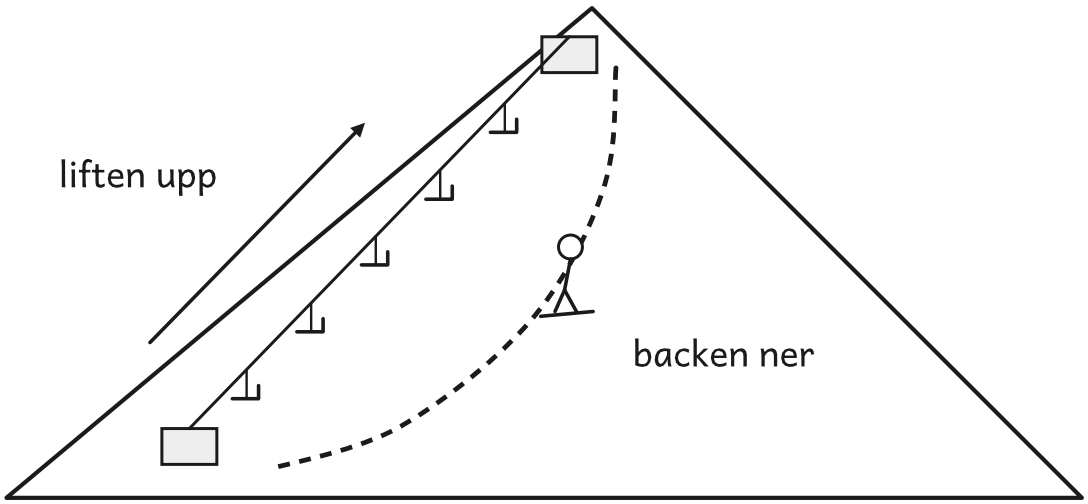
- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Nämnaren 2014:3, Problemavdelningen, nr 4119.

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp/problem

Liften och backen

På sportlovet åker Ella skidor. Liften upp är 2 km lång och går i 10 km/h. Det är ingen kö. Backen ner är också 2 km, och Ella åker ner i 40 km/h.



Frågorna

1. Vilken medelhastighet har Ella för en hel tur, upp och ner?
2. Kan medelhastigheten bli 20 km/h om Ella åker fortare ner?

Idén kommer ur Känguru 2023, Cadet nr 18, och nrich, An Average Average Speed.

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp/problem

Lösningsförslag · Samband och förändring

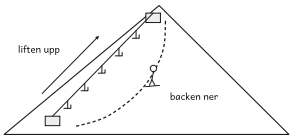
Liften och backen

Problemet

På sportlovet åker Ella skidor. Liften upp är 2 km lång och går i 10 km/h.
Det är ingen kö. Backen ner är också 2 km, och Ella åker ner i 40 km/h.

Vilken medelhastighet har Ella för en hel tur, upp och ner?

Kan medelhastigheten bli 20 km/h om Ella åker fortare ner?



Svaret: 16 km/h. 20 km/h går inte, för då får turen bara ta liftens 12 minuter.
Kontroll: 4 km på 12 + 3 = 15 min ger 16 km/h, och 4 km i 20 km/h tar 12 min.

Idén: *Medelhastigheten är hela sträckan delad med hela tiden, och liften tar fyra gånger så lång tid som backen.*

Lösning A: räkna ut minuterna

Liften: 60 / 10 = 6 min per km
2 km: 2 · 6 = 12 min

Backen: 60 / 40 = 1,5 min per km
2 km: 2 · 1,5 = 3 min

↓

Hela turen: 4 km på 12 + 3 = 15 min

↓

15 · 4 = 60 min och 4 · 4 = 16 km: 16 km/h ✓

---

20 km/h: 4 km får ta 60 / 20 · 4 = 12 min.
Liften tar redan 12 min, så det går inte.

Eleven räknar ut minuterna, 12 + 3 = 15, och ser hur långt Ella kommer på en timme.

Lösning B: väga farterna efter tiden

Backen: 40 / 10 = 4 gånger så fort som liften.
Lika långt, så liften tar 4 gånger så lång tid.
Tiden i 5 lika långa delar:

10 km/h	10 km/h	10 km/h	10 km/h	40 km/h
	liften			backen

4 · 10 + 40 = 80 och 80 / 5 = 16 km/h ✓

Tar backen nästan 0 min, kommer Ella dubbelt så långt som liften på lite mer än liftens tid: under 2 · 10 = 20 km/h.
Backen tar alltid lite tid, så 20 km/h går inte.

Eleven ser att liften tar fyra gånger så lång tid som backen och väger farterna efter det.

Lösning C: tankevurpa

Liften 10 km/h, backen 40 km/h
(10 + 40) / 2 = 25
Svar: 25 km/h.

Eleven räknar som om Ella åkte lika länge i liften som i backen.
Fråga: ”Hur lång tid tar en tur med elevens medelhastighet?”

Frågor om tankarna bakom

1. Hur räknar eleven i lösning A ut minuterna i liften och i backen?
2. Varför delar eleven i lösning B tiden i fem lika delar?
3. Var syns det i båda lösningarna att liften tar fyra gånger så lång tid som backen?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken visar bäst varför 20 km/h inte går?

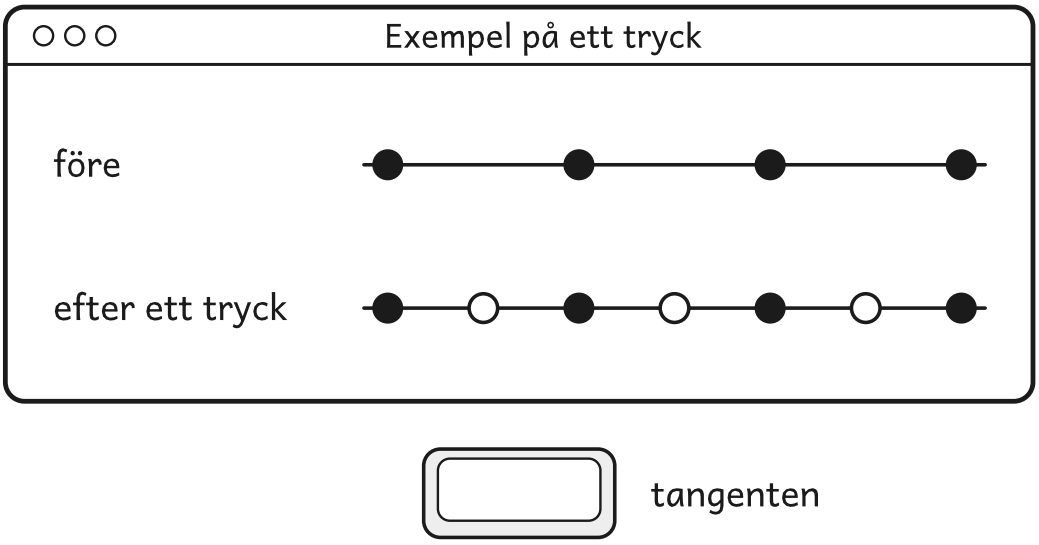
Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Känguru 2023, Cadet nr 18, och nrich, An Average Average Speed.

Prickarna i programmet

Lo gör ett program som ritar prickar på en rak linje. När hon trycker på en tangent, ritar programmet en ny prick mitt i varje mellanrum mellan prickarna. Hon trycker fyra gånger, och då står det 225 prickar på linjen.



Frågorna

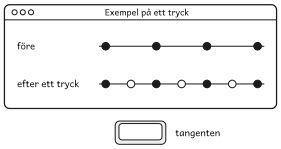
1. Hur många prickar stod på linjen innan Lo tryckte första gången?
2. Kan det stå 320 prickar efter fyra tryck? Visa hur ni vet.

LÖSNINGSFÖRSLAG · ALGEBRA

PRICKARNA I PROGRAMMET

PROBLEMET

Lo gör ett program som ritar prickar på en rak linje. När hon trycker på en tangent, ritar programmet en ny prick mitt i varje mellanrum mellan prickarna. Hon trycker fyra gånger, och då står det 225 prickar på linjen.



Hur många prickar stod på linjen innan Lo tryckte första gången?

Kan det stå 320 prickar efter fyra tryck? Visa hur ni vet.

Svaret: 15 prickar. 320 går inte: baklänges blir det 160,5 prickar.
Kontroll: 15, 29, 57, 113 och 225. Efter ett tryck är antalet udda: 2n − 1.

IDÉN: *Ett tryck sätter en ny prick i varje mellanrum, och det finns ett mellanrum färre än prickar.*

LÖSNING A: RÄKNA BAKLÄNGES

Pröva: 3 prickar blir 5, och 5 blir 9.



Varje tryck: dubbelt så många minus 1.

Baklänges: plus 1 och delat med 2.

↓

225 + 1 = 226 och 226 / 2 = 113
113 + 1 = 114 och 114 / 2 = 57
57 + 1 = 58 och 58 / 2 = 29
29 + 1 = 30 och 30 / 2 = 15 prickar ✓

320 prickar: 320 + 1 = 321 och 321 / 2 = 160,5.
Inget helt antal prickar, så 320 går inte.

Eleven ser i ett litet exempel att det blir dubbelt så många minus 1 och räknar baklänges.

LÖSNING B: TECKNA EN EKVATION

Från början n prickar, med n − 1 mellanrum.
1 tryck: n + n − 1 = 2n − 1
2 tryck: 2(2n − 1) − 1 = 4n − 3
3 tryck: 2(4n − 3) − 1 = 8n − 7
4 tryck: 2(8n − 7) − 1 = 16n − 15

↓

16n − 15 = 225, 16n = 240, n = 240 / 16 = 15 ✓

320 prickar: 16n − 15 = 320 ger 16n = 335.
335 / 16 är inget heltal, så 320 går inte.

Eleven tecknar antalet efter varje tryck och löser ekvationen 16n − 15 = 225.

LÖSNING C: TANKEVURPA

Fyra tryck: 2 · 2 · 2 · 2 = 16
225 / 16 är ungefär 14.
320 / 16 = 20 prickar
Svar: 14 prickar, och 320 går.

Eleven tror att antalet fördubblas vid varje tryck, men det blir dubbelt så många minus 1.

Fråga: ”Hur många prickar blir 14 prickar efter fyra tryck?”

FRÅGOR OM TANKARNA BAKOM

1. Varför lägger eleven i lösning A till 1 och delar med 2 i varje steg?
2. Hur kommer eleven i lösning B fram till 16n − 15?
3. Var syns det i båda lösningarna att ett tryck ger dubbelt så många minus 1?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om Lo tryckte tio gånger, och varför?

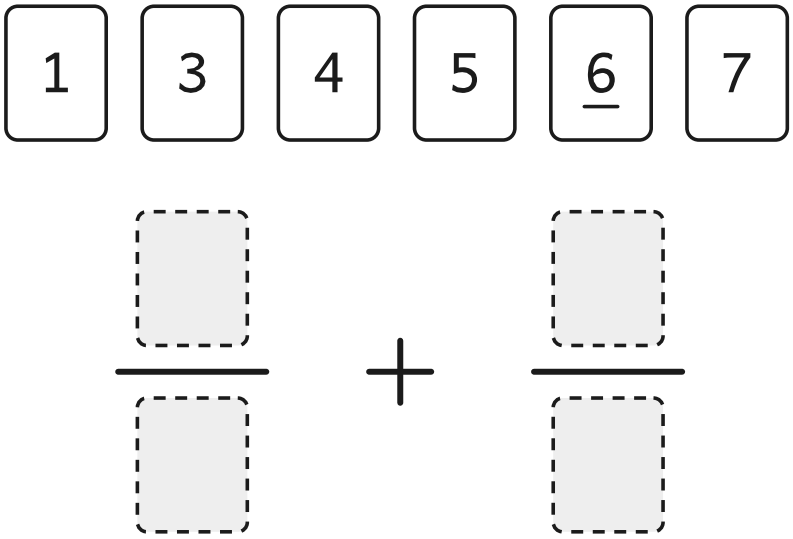
VISA OCH JÄMFÖR LÖSNINGAR

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Bråkspelet

I Bråkspelet lägger man fyra av sina sex kort i rutorna, ett i varje ruta, så att det blir två bråk som läggs ihop. Den som får summan närmast 1 vinner, men exakt 1 räknas inte. Korten får inte vändas upp och ner. Saga har korten 1, 3, 4, 5, 6 och 7.

Sagas kort



Frågorna

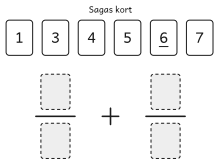
1. Hur ska Saga lägga korten för att komma närmast 1?
2. Hur vet ni att inget annat sätt kommer närmare?

Lösningsförslag · Taluppfattning

Bråkspelet

Problemet

I Bråkspelet lägger man fyra av sina sex kort i rutorna, ett i varje ruta, så att det blir två bråk som läggs ihop. Den som får summan närmast 1 vinner, men exakt 1 räknas inte. Korten får inte vändas upp och ner. *Saga* har korten 1, 3, 4, 5, 6 och 7.



Hur ska *Saga* lägga korten för att komma närmast 1?

Hur vet ni att inget annat sätt kommer närmare?

Svaret: 5/6 + 1/7 = 41/42. Närmare går inte: nämnarnas produkt är högst 6 · 7 = 42.
Kontroll: 5/6 + 1/7 = 35/42 + 6/42 = 41/42 = 1 − 1/42.

Idén: *Avståndet till 1 kan skrivas med nämnarnas produkt som nämnare.*

Lösning A: fylla luckan till 1

nära 1	saknas	fyll med	från 1	
3/4	1/4	1/5	1/20	
4/5	1/5	1/6	1/30	
5/6	1/6	1/7	1/42 ✓	7 är redan lagt.
6/7	1/7	1/5	2/35 över	
5/7	2/7	1/4	1/28	

1/6 − 1/7 = 7/42 − 6/42 = 1/42
Av de fem försöken ligger 5/6 + 1/7 = 41/42 närmast 1.
Kan något annat sätt komma närmare?

Eleven tar ett bråk nära 1 och fyller luckan med ett bråk av korten som är kvar.

Lösning B: räkna med gemensam nämnare

Summan a/b + c/d kan skrivas med nämnaren b · d.
Är summan inte 1, ligger den minst 1/(b · d) från 1.
Störst: 6 · 7 = 42, alltså minst 1/42.
Andra par ger högst 5 · 7 = 35, alltså minst 1/35.
↓
Med 6 och 7: 7 · 5 + 6 · 1 = 41, alltså 41/42.
5/6 + 1/7 = 35/42 + 6/42 = 41/42 ✓

43/42 går inte med korten 1, 3, 4 och 5,
så ingen annan summa kommer lika nära 1.

Eleven ser att nämnarnas produkt är högst 6 · 7 = 42 och söker 41/42 eller 43/42.

Lösning C: tankevurpa

7 + 3 = 10 och 6 + 5 = 11

10/11 är bara 1/11 från 1.

Svar: 7/6 + 3/5.

Eleven lägger ihop täljarna för sig och nämnarna för sig.

Fråga: ”Ungefär hur stor är elevens summa 7/6 + 3/5?”

Frågor om tankarna bakom

1. Hur väljer eleven i lösning A vilket bråk som ska fylla luckan?
2. Varför räcker det för eleven i lösning B att pröva nämnarna 6 och 7?
3. Var syns nämnarnas produkt i avståndet till 1 i båda lösningarna?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med korten 1 till 9, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.