Lärarens sida: Avancerat, problem 8, De lutande kvadraterna

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

På prickpapper går det att rita kvadrater som lutar. Kvadratens sida på bilden går 2 steg åt höger och 1 steg uppåt. Ni räknar arean i rutor, och en ruta är den minsta kvadraten mellan fyra prickar.

Vilken area har kvadraten på bilden?

Vilken area har en kvadrat vars sida går 3 steg åt höger och 2 steg uppåt? Finns det en regel?

Problemet leder från area på prickpapper till Pythagoras sats. En kvadrat vars sida går a steg åt höger och b steg uppåt har arean $a^2 + b^2$. Kvadraten med 2 och 1 steg har arean 5, och den med 3 och 2 steg har 13. Eleverna ramar in, räknar och generaliserar. Material: prickpapper och linjal. Idén kommer ur nrich, Tilted Squares.

Lösning A

2 och 1 steg



ram: 3 · 3 = 9
en triangel: 2 · 1 / 2 = 1
fyra trianglar: 4 · 1 = 4
9 − 4 = 5 rutor



3 och 2 steg

ram: 5 · 5 = 25
en triangel: 3 · 2 / 2 = 3
fyra trianglar: 4 · 3 = 12
25 − 12 = 13 rutor ✓

Lösning B

a: åt höger	b: uppåt	area	$a^2 + b^2$
1	1	2	1 + 1
2	1	5	4 + 1
3	1	10	9 + 1
2	2	8	4 + 4
3	2	13	9 + 4



1 + 4 · 1 = 5

fyra trianglar
och en liten kvadrat

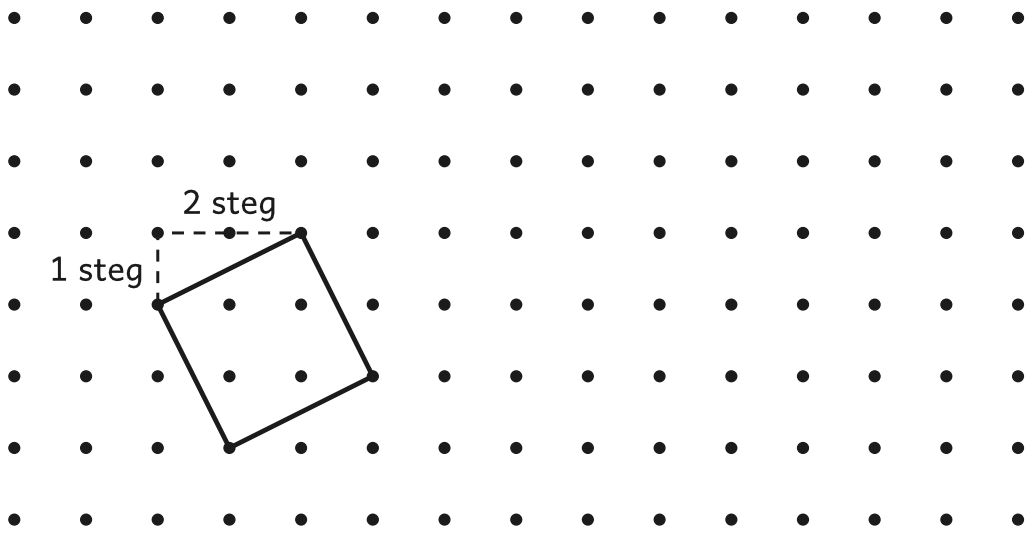
arean = $a^2 + b^2$ 3 och 2: $3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$

Kontroll: $2^2 + 1^2 = 5$, som rutorna ✓

I passet	
Ringa in	Frågorna, stegen 2 och 1 i bilden och 3 och 2 i frågan, och orden lutar, area och ruta.
Lyft ut	Vi vet: hur kvadratens sida går, 2 steg åt höger och 1 upp, och vad en ruta är. Vi ska ta reda på: arean, och en regel för den.
Ord och tal	Följ en sida i bilden, 2 steg åt höger och 1 upp. Fråga: Är kvadratens sida 3 steg lång? Vad mäter ni arean i?
Förutse	Hela rutor och delar av rutor som sätts ihop, en ram runt kvadraten, eller en tabell. Några tror att arean är 3 · 3 = 9.
Kör de fast	Föreslå: Rita in rutorna. Vilka delar av rutor kan ni sätta ihop till hela? Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att en hel ruta ligger i mitten. Försök använda det!
Säg inte	Rita en kvadrat runt den som lutar och ta bort trianglarna i hörnen. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Sidan går 1 steg åt höger och 1 uppåt (2 rutor). Större: Vilka areor kan en kvadrat på prickpapper ha? ($a^2 + b^2$, som 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10 och 13) Går det att rita en med arean 3? (Nej)
Jämför	Arean räknas genom att dela upp kvadraten, eller ramen runt den. A ger 25 − 12 = 13, och B ser $a^2 + b^2$ i tabellen. Lyft fram Pythagoras sats.
Fel eller osäker	Ni säger att arean är 9 rutor. Hur kan ni kontrollera att det stämmer med bilden? *”Är regeln rätt?”* Hur kan ni pröva den på en ny kvadrat?

De lutande kvadraterna

På prickpapper går det att rita kvadrater som lutar. Kvadratens sida på bilden går 2 steg åt höger och 1 steg uppåt. Ni räknar arean i rutor, och en ruta är den minsta kvadraten mellan fyra prickar.



Frågorna

1. Vilken area har kvadraten på bilden?
2. Vilken area har en kvadrat vars sida går 3 steg åt höger och 2 steg uppåt? Finns det en regel?

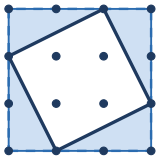
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

De lutande kvadraterna

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

2 och 1 steg

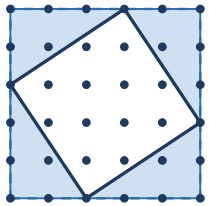


ram: $3 \cdot 3 = 9$

en triangel: $2 \cdot 1 / 2 = 1$

fyra trianglar: $4 \cdot 1 = 4$

$9 - 4 = 5$ rutor



3 och 2 steg

ram: $5 \cdot 5 = 25$

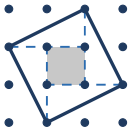
en triangel: $3 \cdot 2 / 2 = 3$

fyra trianglar: $4 \cdot 3 = 12$

$25 - 12 = 13$ rutor ✓

Lösning B

a: åt höger	b: uppåt	area	$a^2 + b^2$
1	1	2	1 + 1
2	1	5	4 + 1
3	1	10	9 + 1
2	2	8	4 + 4
3	2	13	9 + 4



$1 + 4 \cdot 1 = 5$

fyra trianglar
och en liten kvadrat

arean = $a^2 + b^2$

3 och 2: $3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$

Kontroll: $2^2 + 1^2 = 5$, som rutorna ✓

Frågor att prata om

1. Vad gör eleven i lösning A med ramen och trianglarna?
2. Hur ser eleven i lösning B regeln i tabellen?
3. Var syns det i båda lösningarna att kvadraten med 3 och 2 steg har arean 13?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 7 och 4 steg, och varför?

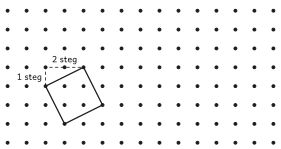
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Lösningsförslag · Geometri

De lutande kvadraterna

Problemet

På prickpapper går det att rita kvadrater som lutar. Kvadratens sida på bilden går 2 steg åt höger och 1 steg uppåt. Ni räknar arean i rutor, och en ruta är den minsta kvadraten mellan fyra prickar.



Vilken area har kvadraten på bilden?

Vilken area har en kvadrat vars sida går 3 steg åt höger och 2 steg uppåt?

Finns det en regel?

Svaret: 5 rutor. Med 3 och 2 steg blir det 13, och arean är $a^2 + b^2$.
Kontroll: $3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 1 / 2 = 5$ och $5 \cdot 5 - 4 \cdot 3 \cdot 2 / 2 = 13 = 3^2 + 2^2$.

Idén: *Arean räknas i rutor genom att dela den lutande kvadraten, eller ramen runt den, i trianglar och kvadrater.*

Lösning A: en ram



ram: $3 \cdot 3 = 9$
en triangel: $2 \cdot 1 / 2 = 1$
fyra trianglar: $4 \cdot 1 = 4$
$9 - 4 = 5$ rutor



ram: $5 \cdot 5 = 25$
en triangel: $3 \cdot 2 / 2 = 3$
fyra trianglar: $4 \cdot 3 = 12$
$25 - 12 = 13$ rutor ✓

Eleven ritar en kvadrat runt den som lutar och tar bort de fyra trianglarna i hörnen.

Lösning B: dela upp kvadraterna

a: åt höger	b: uppåt	area	$a^2 + b^2$
1	1	2	1 + 1
2	1	5	4 + 1
3	1	10	9 + 1
2	2	8	4 + 4
3	2	13	9 + 4



$1 + 4 \cdot 1 = 5$

fyra trianglar och en liten kvadrat

arean = $a^2 + b^2$ 3 och 2: $3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$
Kontroll: $2^2 + 1^2 = 5$, som rutorna ✓

Eleven delar kvadraterna i fyra trianglar och en liten kvadrat, för in areorna i en tabell och ser $a^2 + b^2$.

Lösning C: tankevurpa

Sidan: $2 + 1 = 3$ steg

$3 \cdot 3 = 9$

Svar: 9 rutor.

Sidan lutar och är kortare än 3 steg. $3 \cdot 3 = 9$ är ramen runt kvadraten, med trianglarna i hörnen.

Fråga: ”Vad räknar $3 \cdot 3 = 9$ på bilden?”

Frågor om tankarna bakom

1. Vad gör eleven i lösning A med ramen och trianglarna?
2. Hur ser eleven i lösning B regeln i tabellen?
3. Var syns det i båda lösningarna att kvadraten med 3 och 2 steg har arean 13?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 7 och 4 steg, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur nrich, Tilted Squares.