Lärarens sidor: Bas

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Här står problemen på nivån Bas, som ligger nära åk 4–5, i den ordning gruppen tar dem. Varje problem har lärarens sida, problemets sida, bladet Två lösningar och ett lösningsförslag.

Problemet	Matematiken	Lösning A	Lösning B
1. Äpplena	räkna baklänges, del och helhet	Gör en tabell: pröva 2, 3 och 4 ur varje	Räkna baklänges från det som är kvar
2. Fiskebodarna	ett mönster som växer	Gör en tabell: 4 stickor till per bod	Leta efter ett mönster: 1 sticka och 4 per bod
3. Kexen	jämna ut, som ett medelvärde	Rita eller bygg: jämna ut i staplar	räkna alla kex och dela med 3
4. Chokladbollarna	proportionalitet	Gör en tabell: 10, 20 och 30 bollar	Ta varje mått gånger 1,5
5. Ljusstakarna	två okända tal	Pröva och förbättra i en tabell	Tänk dig att alla är av samma sort
6. Tornet	ett mönster av kuber	Leta efter ett mönster: lager för lager	Rita eller bygg: stolpen och fyra trappor
7. Matcherna	kombinatorik	Gör en lista: lag för lag i ordning	Rita eller bygg: prickar och streck
8. Tärningarna	sannolikhet	kasta 36 gånger och sätt streck	Gör en tabell: alla 36 utfall
9. Parken	omkrets och varv	Gör en tabell: meter efter varje varv	Rita eller bygg: hopp på tallinjer
10. Vågen	likheter med tre okända	lägg ihop alla tre vågarna	jämför vågarna två och två

Så använder du problemen	
Ordningen	Ta problemen i ordning, ett per pass, och byt ordning när gruppen behöver arbeta med ett annat område eller ett problem som liknar det förra. De första är lättast att börja på.
Kopiorna	Kopiera problemets sida till varje par, eller visa den på tavlan. I Jämföra får varje par bladet Två lösningar, med B under ett papper tills gruppen har sagt vad A gör.

© Niclas Fohlin. Ur Problemlösning i grupp, https://niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp.

Lärarens sida: Bas, problem 1, Äpplena

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

Fyra påsar med äpplen står på bänken. I påsarna finns 25 äpplen tillsammans. Elsa tar lika många äpplen ur varje påse. Sedan finns det 1, 2, 3 och 3 äpplen kvar i påsarna.

Hur många äpplen tog Elsa ur varje påse?

Hur många äpplen fanns det i varje påse från början?

Problemet handlar om del och helhet och om att räkna baklänges. Svaret är 4 äpplen ur varje påse, och påsarna hade 5, 6, 7 och 7. Eleverna lägger ihop, delar lika och ser att ett äpple mer ur varje påse ger fyra äpplen mer från början. Material: kuber, 25 per par. Idén kommer ur Känguru 2026, Ecolier nr 11.

Lösning A

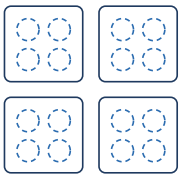
ur varje påse	påsarna från början	ihop
2	3, 4, 5, 5	17 för få
3	4, 5, 6, 6	21 för få
4	5, 6, 7, 7	25 ✓

+ 4

+ 4

Så räknade vi sista raden: 5 + 6 + 7 + 7 = 25

Lösning B



16 äpplen i 4 lika delar

Kvar: 1 + 2 + 3 + 3 = 9

↓

Elsa tog 25 − 9 = 16

↓

16 / 4 = 4 ur varje påse

Kontroll: påsarna från början

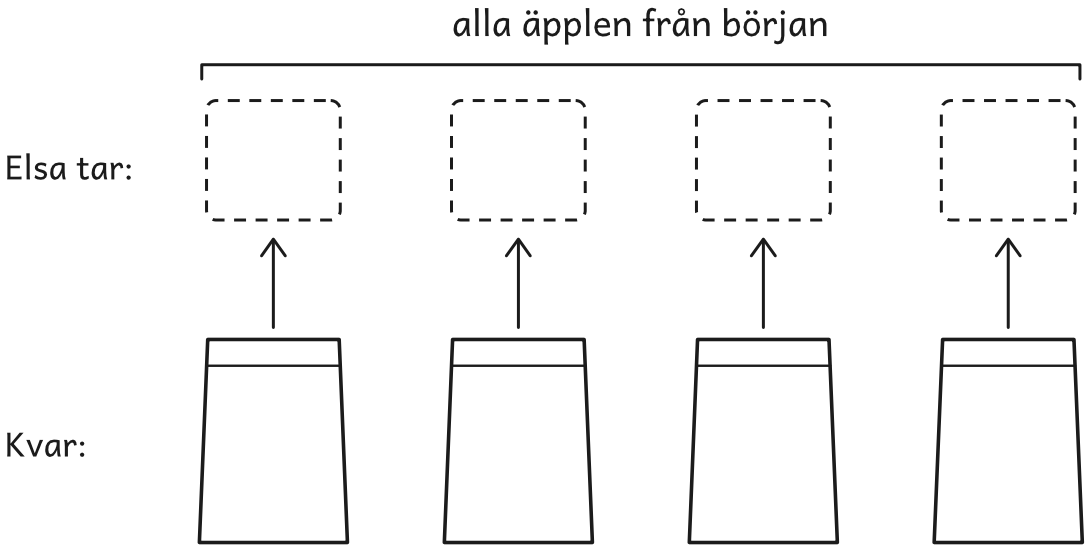
5 + 6 + 7 + 7 = 25 ✓

I passet	
Ringa in	Frågorna, orden *”lika många”* och *”kvar”*, talet 25 och de fyra talen 1, 2, 3 och 3.
Lyft ut	Vi vet: 25 äpplen i fyra påsar, lika många ur varje, och 1, 2, 3 och 3 blir kvar. Vi ska ta reda på: hur många ur varje påse, och hur många från början.
Ord och tal	Visa bilden: påsarna visar det som är kvar, rutorna det Elsa tar och klammern alla äpplen från början. Fråga: Vad räknar 25, och vad räknar 1, 2, 3 och 3?
Förutse	Eleverna lägger kuber i fyra högar, prövar ett antal eller räknar det som är kvar först. Ofta svarar någon 9 eller 16.
Kör de fast	Föreslå: Gissa hur många Elsa tog ur varje påse, och räkna hur många det blir från början. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att 3 ur varje påse gav 21 äpplen från början. Försök använda det!
Säg inte	Räkna först det som är kvar och dra bort det från 25. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: 13 äpplen, och 1, 2, 1 och 1 kvar (2 ur varje). Större: Kan det ha funnits 27 äpplen från början? (Nej: (27 − 9) / 4 går inte jämnt ut) Vilka antal äpplen går, om 1, 2, 3 och 3 blir kvar? (13, 17, 21 och så vidare)
Jämför	Det Elsa tar ur påsarna är fyra lika delar. I A blir alla äpplen från början 4 fler för varje rad, och B delar 16 i fyra lika delar.
Fel eller osäker	Ni säger att svaret är 9. Hur kan ni kontrollera att det svarar på frågan? Ni säger att påsarna hade lika många från början. Hur kan ni kontrollera det mot problemet?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Äpplena

Fyra påsar med äpplen står på bänken. I påsarna finns 25 äpplen tillsammans. Elsa tar lika många äpplen ur varje påse. Sedan finns det 1, 2, 3 och 3 äpplen kvar i påsarna.



Frågorna

1. Hur många äpplen tog Elsa ur varje påse?
2. Hur många äpplen fanns det i varje påse från början?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Äpplena

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

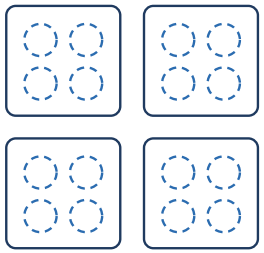
ur varje påse	påsarna från början	ihop
2	3, 4, 5, 5	17 för få
3	4, 5, 6, 6	21 för få
4	5, 6, 7, 7	25 ✓

↓ + 4

↓ + 4

Så räknade vi sista raden: 5 + 6 + 7 + 7 = 25

Lösning B



16 äpplen
i 4 lika delar

Kvar: 1 + 2 + 3 + 3 = 9

↓

Elsa tog 25 − 9 = 16

↓

16 / 4 = 4 ur varje påse

Kontroll: påsarna från början
5 + 6 + 7 + 7 = 25 ✓

Frågor att prata om

1. Vad ändrar eleven i lösning A från rad till rad, och vad händer med alla äpplen från början?
2. Varför räknar eleven i lösning B först de äpplen som är kvar?
3. Var syns det i båda lösningarna att det Elsa tog är fyra lika delar?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 10 påsar och 100 äpplen, och varför?

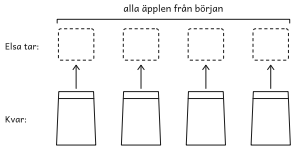
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Lösningsförslag · Taluppfattning

Äpplena

Problemet

Fyra påsar med äpplen står på bänken. I påsarna finns 25 äpplen tillsammans. Elsa tar lika många äpplen ur varje påse. Sedan finns det 1, 2, 3 och 3 äpplen kvar i påsarna.



Hur många äpplen tog Elsa ur varje påse?

Hur många äpplen fanns det i varje påse från början?

Svaret: 4 äpplen ur varje påse. Påsarna hade 5, 6, 7 och 7 äpplen.
Kontroll: 5 + 6 + 7 + 7 = 25, och 5 − 4 = 1, 6 − 4 = 2, 7 − 4 = 3.

Idén: *Det Elsa tar ur påsarna är fyra lika delar.*

Lösning A: pröva och förbättra

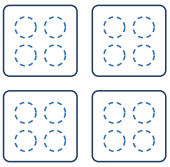
ur varje påse	påsarna från början	ihop
2	3, 4, 5, 5	17 för få
3	4, 5, 6, 6	21 för få
4	5, 6, 7, 7	25 ✓

+ 4
+ 4

Så räknade vi sista raden: 5 + 6 + 7 + 7 = 25

Eleven prövar 2, 3 och 4 ur varje påse, och alla äpplen från början blir 4 fler för varje rad.

Lösning B: räkna baklänges



16 äpplen i 4 lika delar

Kvar: 1 + 2 + 3 + 3 = 9
↓
Elsa tog 25 − 9 = 16
↓
16 / 4 = 4 ur varje påse

Kontroll: påsarna från början
5 + 6 + 7 + 7 = 25 ✓

Eleven räknar först de 9 äpplen som är kvar och delar de 16 som Elsa tog i fyra lika delar.

Lösning C: tankevurpa

1 + 2 + 3 + 3 = 9

25 − 9 = 16

Svar: Elsa tog 16 ur varje påse.

16 är alla äpplen som Elsa tog, och den andra frågan saknar svar.

Fråga: ”Hur många äpplen hade påsarna från början, om Elsa tog 16 ur varje?”

Frågor om tankarna bakom

1. Vad ändrar eleven i lösning A från rad till rad, och vad händer med alla äpplen från början?
2. Varför räknar eleven i lösning B först de äpplen som är kvar?
3. Var syns det i båda lösningarna att det Elsa tog är fyra lika delar?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 10 påsar och 100 äpplen, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Lärarens sida: Bas, problem 2, Fiskebodarna

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

Lisa bygger fiskebodar av stickor. En bod har ett golv, två väggar och ett tak av två stickor. När bodarna står i rad, delar två bodar på en vägg. Bilden visar en bod och tre bodar i rad.

Hur många stickor behövs till 6 bodar i rad?

Hur många stickor behövs till 20 bodar i rad?

Problemet handlar om ett mönster som växer, där varje ny bod tar fyra stickor till. Svaret är 25 stickor till 6 bodar och 81 till 20 bodar. Eleverna bygger, för in i en tabell och beskriver mönstret med ord. Material: tändstickor eller glasspinnar, 30 per par. Idén kommer ur NCM:s Strävorna 4B/5B, Fiskebodar.

Lösning A

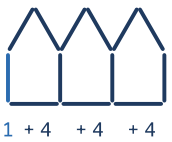
bodar	stickor		bodar	stickor
1	5		11	45
2	9	+ 4	12	49
3	13	+ 4	13	53
4	17	+ 4	14	57
5	21		15	61
6	25		16	65
7	29		17	69
8	33		18	73
9	37		19	77
10	41		20	81

Varje ny bod ger 4 stickor till.

6 bodar: 25 stickor ✓

20 bodar: 81 stickor ✓

Lösning B



den första väggen och 4 för varje bod

Första väggen: 1 sticka
Varje bod: 4 stickor till

↓

6 bodar: 1 + 6 · 4 = 25

↓

20 bodar: 1 + 20 · 4 = 81

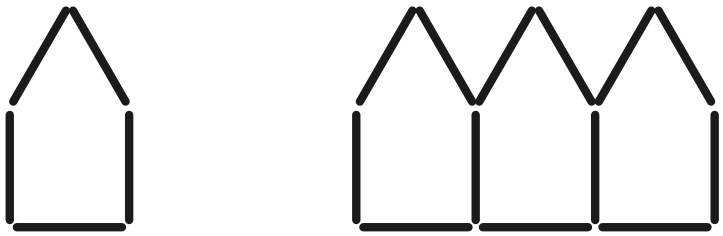
Kontroll: 3 bodar på bilden
1 + 3 · 4 = 13 stickor ✓

I passet	
Ringa in	Frågorna, talen 6 och 20, och orden *”i rad”* och *”delar på en vägg”*.
Lyft ut	Vi vet: en bod har fem stickor, och två bodar i rad delar på en vägg. Vi ska ta reda på: antalet stickor till 6 och till 20 bodar.
Ord och tal	Peka på golvet, väggarna och taket, och på väggen som två bodar delar. Fråga: Vad räknar 6 och 20, och vad ska vi räkna?
Förutse	Eleverna bygger bodar, gör en tabell där talen ökar med 4 eller räknar en sticka och 4 per bod. Någon räknar 6 · 5 = 30 och glömmer de delade väggarna.
Kör de fast	Föreslå: Bygg 1, 2 och 3 bodar och räkna stickorna. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att varje ny bod tog 4 stickor. Försök använda det!
Säg inte	Börja med en sticka och lägg till fyra för varje bod. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: 4 bodar och 10 bodar (17 och 41 stickor). Större: Hur många stickor behövs till 99 bodar? (397) Skriv med ord en regel som gäller för alla bodar. (En sticka, och sedan 4 för varje bod)
Jämför	Varje ny bod tar 4 stickor till. I A ökar stickorna med 4 från rad till rad, och i B syns det i 6 · 4 och 20 · 4.
Fel eller osäker	Ni säger att det blir 30 stickor. Hur kan ni kontrollera att det stämmer med problemet? Ni säger att 20 bodar tar dubbelt så många som 10. Hur kan ni kontrollera det med 2 och 4 bodar?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Fiskebodarna

Lisa bygger fiskebodar av stickor. En bod har ett golv, två väggar och ett tak av två stickor. När bodarna står i rad, delar två bodar på en vägg. Bilden visar en bod och tre bodar i rad.



en bod tre bodar i rad

Frågorna

1. Hur många stickor behövs till 6 bodar i rad?
2. Hur många stickor behövs till 20 bodar i rad?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Fiskebodarna

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

bodar	stickor
1	5
2	9
3	13
4	17
5	21
6	25
7	29
8	33
9	37
10	41

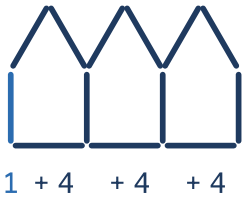
+ 4
+ 4
+ 4

bodar	stickor
11	45
12	49
13	53
14	57
15	61
16	65
17	69
18	73
19	77
20	81

Varje ny bod ger 4 stickor till.

6 bodar: 25 stickor ✓

20 bodar: 81 stickor ✓



den första väggen och 4 för varje bod

Lösning B

Första väggen: 1 sticka
Varje bod: 4 stickor till

↓

6 bodar: $1 + 6 \cdot 4 = 25$

↓

20 bodar: $1 + 20 \cdot 4 = 81$

Kontroll: 3 bodar på bilden
$1 + 3 \cdot 4 = 13$ stickor ✓

Frågor att prata om

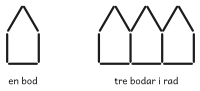
1. Hur fortsätter eleven tabellen i lösning A från rad till rad?
2. Varför börjar eleven i lösning B med 1 sticka?
3. Var syns det i båda lösningarna att varje ny bod tar 4 stickor till?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja för 99 bodar, och varför?

LÖSNINGSFÖRSLAG · ALGEBRA

FISKEBODARNA

PROBLEMET

Lisa bygger fiskebodar av stickor. En bod har ett golv, två väggar och ett tak av två stickor. När bodarna står i rad, delar två bodar på en vägg. Bilden visar en bod och tre bodar i rad.



Hur många stickor behövs till 6 bodar i rad?

Hur många stickor behövs till 20 bodar i rad?

Svaret: 25 stickor till 6 bodar och 81 stickor till 20 bodar.
Kontroll: 6 · 5 − 5 = 25 och 20 · 5 − 19 = 81, där 5 och 19 väggar delas.

IDÉN: *Varje ny bod tar 4 stickor till, eftersom den delar en vägg med boden före.*

LÖSNING A: FORTSÄTTA TABELLEN

bodar	stickor		bodar	stickor
1	5		11	45
2	9	+ 4	12	49
3	13	+ 4	13	53
4	17	+ 4	14	57
5	21		15	61
6	25		16	65
7	29		17	69
8	33		18	73
9	37		19	77
10	41		20	81

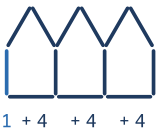
Varje ny bod ger 4 stickor till.

6 bodar: 25 stickor ✓

20 bodar: 81 stickor ✓

Eleven räknar stickorna till 1, 2 och 3 bodar och fortsätter tabellen med 4 till för varje bod.

LÖSNING B: SE STRUKTUREN



den första väggen och 4 för varje bod

Första väggen: 1 sticka
Varje bod: 4 stickor till
↓
6 bodar: 1 + 6 · 4 = 25
↓
20 bodar: 1 + 20 · 4 = 81

Kontroll: 3 bodar på bilden
1 + 3 · 4 = 13 stickor ✓

Eleven ser den första väggen för sig och 4 stickor för varje bod: golvet, taket och väggen till höger.

LÖSNING C: TANKEVURPA

En bod har 5 stickor.

6 · 5 = 30

20 · 5 = 100

Svar: 30 och 100 stickor.

Eleven glömmer att två bodar delar en vägg. Bilden med 3 bodar har 13 stickor, och 3 · 5 = 15.
Fråga: ”Var räknar eleven för många stickor?”

FRÅGOR OM TANKARNA BAKOM

1. Hur fortsätter eleven tabellen i lösning A från rad till rad?
2. Varför börjar eleven i lösning B med 1 sticka?
3. Var syns det i båda lösningarna att varje ny bod tar 4 stickor till?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja för 99 bodar, och varför?

VISA OCH JÄMFÖR LÖSNINGAR

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Lärarens sida: Bas, problem 3, Kexen

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

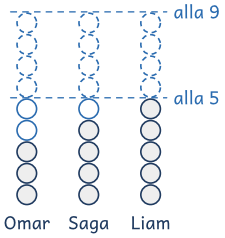
Tre barn har var sitt fat med kex. På Omars fat ligger 3 kex, på Sagas 4 och på Liams 5. På en bricka ligger 15 kex till. Barnen delar på kexen från brickan, så att alla tre har lika många kex till slut.

Hur många kex har vart och ett av barnen till slut?

Hur många kex från brickan får vart och ett av barnen?

Problemet handlar om att dela lika när delarna är olika stora från början. Det är idén bakom medelvärdet. Svaret är 9 kex var, och från brickan får Omar 6, Saga 5 och Liam 4. Eleverna lägger ihop, delar lika och jämnar ut. Material: kuber eller kex, 32 per par. Idén kommer ur Känguru 2025, Ecolier nr 11.

Lösning A



Först får alla 5:
Omar 2, Saga 1, Liam 0
↓
15 − 3 = 12 kvar
↓
12 / 3 = 4 var
↓
Alla har 5 + 4 = 9 ✓

Från brickan:
Omar 6, Saga 5, Liam 4

Lösning B



9 kex var.
De streckade är
från brickan.

Alla kex:
3 + 4 + 5 + 15 = 27
↓
27 / 3 = 9 var
↓
Omar 9 − 3 = 6
Saga 9 − 4 = 5
Liam 9 − 5 = 4

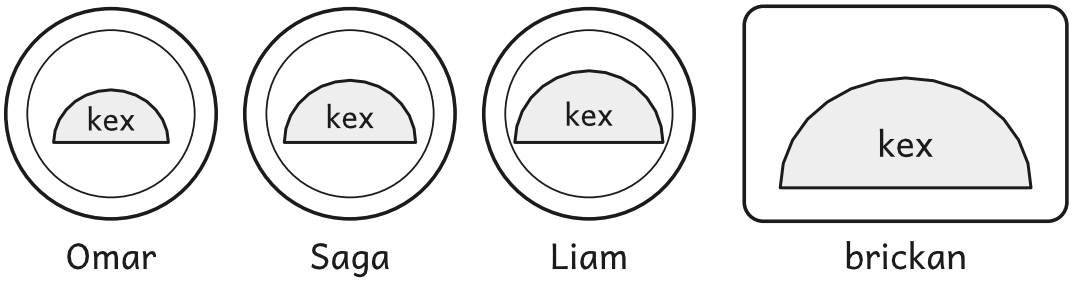
Kontroll: 6 + 5 + 4 = 15 ✓

I passet	
Ringa in	Frågorna, talen 3, 4, 5 och 15, och orden *”lika många”* och *”från brickan”*.
Lyft ut	Vi vet: faten har 3, 4 och 5 kex, brickan 15. Alla ska ha lika många. Vi ska ta reda på: hur många var och en har till slut och får från brickan.
Ord och tal	Peka på faten, brickan och kexen på bilden. Fråga: Vad räknar 15? Betyder *”lika många”* att alla får lika många från brickan?
Förutse	Eleverna delar ut kex eller kuber, jämnar ut staplar eller räknar alla kex först. Någon delar 15 / 3 = 5.
Kör de fast	Föreslå: Lägg ut kexen med kuber och dela ut från brickan. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att alla kan ha 5, som Liam. Försök använda det!
Säg inte	Lägg ihop alla kexen och dela med 3. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Faten har 1, 2 och 3 kex, och brickan 6 (4 var). Större: Ett fjärde barn kommer med 5 kex på sitt fat. Hur många får var och en från brickan nu? (Alla har 8: 5, 4, 3 och 3 från brickan)
Jämför	Barnen delar alla 27 kex lika, och var och en får det som fattas till 9. I A syns det i staplarna, och B räknar 9 − 3, 9 − 4 och 9 − 5.
Fel eller osäker	Ni säger att alla får 5 från brickan. Hur kan ni kontrollera att det stämmer med problemet? *”Är svaret 9 kex från brickan?”* Hur kan ni kontrollera att det svarar på frågan?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Kexen

Tre barn har var sitt fat med kex. På Omars fat ligger 3 kex, på Sagas 4 och på Liams 5. På en bricka ligger 15 kex till. Barnen delar på kexen från brickan, så att alla tre har lika många kex till slut.



Frågorna

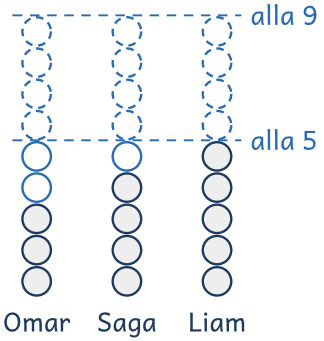
1. Hur många kex har vart och ett av barnen till slut?
2. Hur många kex från brickan får vart och ett av barnen?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Kexen

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A



Först får alla 5:
Omar 2, Saga 1, Liam 0

↓

15 − 3 = 12 kvar

↓

12 / 3 = 4 var

↓

Alla har 5 + 4 = 9 ✓

Från brickan:
Omar 6, Saga 5, Liam 4

Lösning B



9 kex var.
De streckade är
från brickan.

Alla kex:
3 + 4 + 5 + 15 = 27

↓

27 / 3 = 9 var

↓

Omar 9 − 3 = 6
Saga 9 − 4 = 5
Liam 9 − 5 = 4

Kontroll: 6 + 5 + 4 = 15 ✓

Frågor att prata om

1. Varför ger eleven i lösning A först kex till Omar och Saga?
2. Varför räknar eleven i lösning B alla kexen, också de på faten?
3. Var syns det i båda lösningarna att var och en får det som fattas till 9?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 10 barn, och varför?

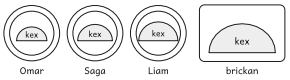
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Lösningsförslag · Taluppfattning

Kexen

Problemet

Tre barn har var sitt fat med kex. På Omars fat ligger 3 kex, på Sagas 4 och på Liams 5. På en bricka ligger 15 kex till. Barnen delar på kexen från brickan, så att alla tre har lika många kex till slut.



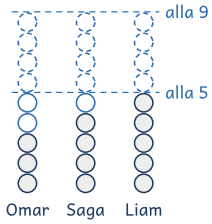
Hur många kex har vart och ett av barnen till slut?

Hur många kex från brickan får vart och ett av barnen?

Svaret: 9 kex var. Från brickan får Omar 6, Saga 5 och Liam 4.
Kontroll: 3 + 6 = 9, 4 + 5 = 9 och 5 + 4 = 9, och 6 + 5 + 4 = 15.

Idén: *Barnen delar alla 27 kex lika, och var och en får det som fattas till 9.*

Lösning A: Jämna ut



Först får alla 5:
Omar 2, Saga 1, Liam 0
↓
15 − 3 = 12 kvar
↓
12 / 3 = 4 var
↓
Alla har 5 + 4 = 9 ✓

Från brickan:
Omar 6, Saga 5, Liam 4

Eleven ger först Omar 2 och Saga 1, så att alla har 5, och delar sedan resten lika.

Lösning B: Räkna alla kex



9 kex var.
De streckade är från brickan.

Alla kex:
3 + 4 + 5 + 15 = 27
↓
27 / 3 = 9 var
↓
Omar 9 − 3 = 6
Saga 9 − 4 = 5
Liam 9 − 5 = 4

Kontroll: 6 + 5 + 4 = 15 ✓

Eleven lägger ihop alla 27 kex, delar med 3 och räknar hur många var och en saknar till 9.

Lösning C: Tankevurpa

Brickan har 15 kex.

15 / 3 = 5

Svar: Alla får 5 från brickan.

Eleven delar kexen på brickan lika, men barnen ska ha lika många kex till slut.

Fråga: ”Hur många kex har Omar och Liam till slut med elevens svar?”

Frågor om tankarna bakom

1. Varför ger eleven i lösning A först kex till Omar och Saga?
2. Varför räknar eleven i lösning B alla kexen, också de på faten?
3. Var syns det i båda lösningarna att var och en får det som fattas till 9?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 10 barn, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Lärarens sida: Bas, problem 4, Chokladbollarna

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

Gruppen vill göra 30 chokladbollar till klassens fest. Receptet räcker till 20 bollar, och till dem behövs 4 dl havregryn, 2 dl socker, 100 g smör och 2 msk kakao.

Hur mycket av varje sak behövs till 30 chokladbollar?

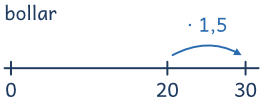
Problemet handlar om proportionalitet: fler bollar kräver mer av allt, i samma förhållande. Svaret är 6 dl havregryn, 3 dl socker, 150 g smör och 3 msk kakao. Eleverna lägger till halva receptet, eller tar varje mått gånger 1,5. Idén kommer ur Skolverkets Problembank för årskurs 4–6, Chokladbollar.

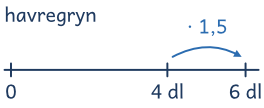
Lösning A

bollar	havregryn	socker	smör	kakao	
20	4 dl	2 dl	100 g	2 msk	
10	2 dl	1 dl	50 g	1 msk	↓ hälften
30	6 dl	3 dl	150 g	3 msk	20 och 10 ihop

Så räknade vi havregrynet:
4 / 2 = 2 dl och 4 + 2 = 6 dl

Lösning B





30 / 20 = 1,5
Allt gånger 1,5:
1,5 · 4 = 6 dl havregryn
1,5 · 2 = 3 dl socker
1,5 · 100 = 150 g smör
1,5 · 2 = 3 msk kakao

Kontroll per boll:
6 / 30 = 4 / 20 ✓

I passet	
Ringa in	Frågan, talen 20 och 30 bollar, och receptets mått.
Lyft ut	Vi vet: receptet räcker till 20 bollar, med 4 dl havregryn, 2 dl socker, 100 g smör och 2 msk kakao. Vi ska ta reda på: måtten för 30 bollar.
Ord och tal	Visa receptkortet och reda ut vad dl, g och msk betyder. Fråga: Vad räknar 20 och 30?
Förutse	Eleverna halverar receptet, tar allt gånger 1,5 eller räknar per boll. Någon lägger till 10 på varje mått, eftersom 30 är 10 fler än 20.
Kör de fast	Föreslå: Prova ett enklare problem med färre bollar. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att 10 bollar är hälften av receptet. Försök använda det!
Säg inte	Räkna ut receptet för 10 bollar först. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Bara havregrynet, 2 dl till 10 bollar. Hur mycket till 15 bollar? (3 dl) Större: Hur mycket behövs till 50 bollar? (10 dl havregryn, 5 dl socker, 250 g smör och 5 msk kakao) Hur många bollar räcker 1 kg smör till? (200)
Jämför	30 bollar kräver receptet en och en halv gång. I A lägger eleven till halva receptet, och i B tar eleven varje mått gånger 1,5.
Fel eller osäker	Ni säger 14 dl havregryn, eftersom 30 är 10 fler än 20. Hur kan ni kontrollera det mot receptet? *”Är svaret 6 dl havregryn?”* Hur kan ni kontrollera att det svarar på frågan?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Chokladbollarna

Gruppen vill göra 30 chokladbollar till klassens fest. Receptet räcker till 20 bollar, och till dem behövs 4 dl havregryn, 2 dl socker, 100 g smör och 2 msk kakao.

Chokladbollar

- havregryn
- socker
- smör
- kakao

Frågan

Hur mycket av varje sak behövs till 30 chokladbollar?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Chokladbollarna

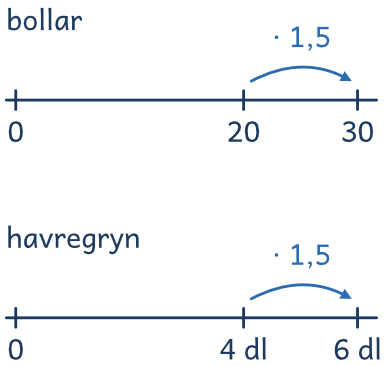
Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

bollar	havregryn	socker	smör	kakao	
20	4 dl	2 dl	100 g	2 msk	
10	2 dl	1 dl	50 g	1 msk	↓ hälften
30	6 dl	3 dl	150 g	3 msk	20 och 10 ihop

Så räknade vi havregrynet:
4 / 2 = 2 dl och 4 + 2 = 6 dl

Lösning B



30 / 20 = 1,5

Allt gånger 1,5:

1,5 · 4 = 6 dl havregryn
1,5 · 2 = 3 dl socker
1,5 · 100 = 150 g smör
1,5 · 2 = 3 msk kakao

Kontroll per boll:
6 / 30 = 4 / 20 ✓

Frågor att prata om

1. Hur får eleven i lösning A raden för 30 bollar?
2. Varför tar eleven i lösning B varje mått gånger 1,5?
3. Var syns det i båda lösningarna att 30 bollar kräver receptet en och en halv gång?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja för 70 bollar, och varför?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Lösningsförslag · Samband och förändring

Chokladbollarna

Problemet

Gruppen vill göra 30 chokladbollar till klassens fest. Receptet räcker till 20 bollar, och till dem behövs 4 dl havregryn, 2 dl socker, 100 g smör och 2 msk kakao.



Hur mycket av varje sak behövs till 30 chokladbollar?

Svaret: 6 dl havregryn, 3 dl socker, 150 g smör och 3 msk kakao.
Kontroll: Per boll: 6 / 30 = 4 / 20, 3 / 30 = 2 / 20 och 150 / 30 = 100 / 20.

Idén: *30 bollar kräver receptet en och en halv gång.*

Lösning A: lägga till hälften

bollar	havregryn	socker	smör	kakao
20	4 dl	2 dl	100 g	2 msk
10	2 dl	1 dl	50 g	1 msk
30	6 dl	3 dl	150 g	3 msk

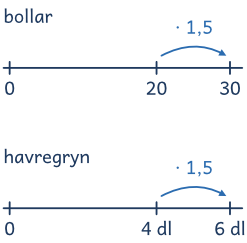
↓ hälften

20 och 10 ihop

Så räknade vi havregrynet:
4 / 2 = 2 dl och 4 + 2 = 6 dl

Eleven halverar receptet till 10 bollar och lägger ihop raderna för 20 och 10 bollar.

Lösning B: receptet 1,5 gånger



30 / 20 = 1,5
Allt gånger 1,5:
1,5 · 4 = 6 dl havregryn
1,5 · 2 = 3 dl socker
1,5 · 100 = 150 g smör
1,5 · 2 = 3 msk kakao

Kontroll per boll:
6 / 30 = 4 / 20 ✓

Eleven ser att 30 bollar är 1,5 gånger så många som 20 och tar varje mått gånger 1,5.

Lösning C: tankevurpa

30 bollar är 10 fler än 20.
4 + 10 = 14 och 2 + 10 = 12
100 + 10 = 110
Svar: 14, 12, 110 och 12.

Eleven lägger till 10 på varje mått. Bollarna blir 1,5 gånger så många, och måtten ska bli 1,5 gånger så stora.
Fråga: ”Vad ger elevens sätt för 10 bollar?”

Frågor om tankarna bakom

1. Hur får eleven i lösning A raden för 30 bollar?
2. Varför tar eleven i lösning B varje mått gånger 1,5?
3. Var syns det i båda lösningarna att 30 bollar kräver receptet en och en halv gång?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja för 70 bollar, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Lärarens sida: Bas, problem 5, Ljusstakarna

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

På ett slott finns 29 ljusstakar. Några av dem har plats för fem ljus, och några har plats för sju ljus. Sammanlagt behövs 187 ljus.

Hur många ljusstakar finns det av varje sort?

Problemet handlar om två okända tal som hänger ihop, antalet femarmade och antalet sjuarmade. Svaret är 8 femarmade och 21 sjuarmade. Eleverna räknar med multiplikation och addition i flera steg och ser att varje byte från femarmad till sjuarmad ger två ljus till. Problemet kommer ur Lithner m.fl. (2025).

Lösning A

femarmade	sjuarmade	ljus ihop
29	0	145 för få
19	10	165
9	20	185 nästan!
8	21	187 ✓

Så räknade vi andra raden:

19 · 5 = 95

10 · 7 = 70

95 + 70 = 165

Lösning B



en sjuarmad: 2 ljus till

Om alla 29 vore femarmade:

29 · 5 = 145 ljus

↓

187 − 145 = 42 ljus saknas

↓

42 / 2 = 21 sjuarmade

↓

29 − 21 = 8 femarmade

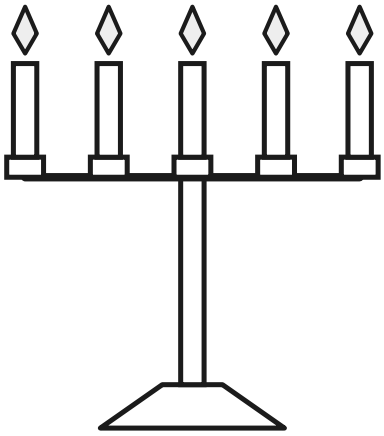
Kontroll: 8 · 5 + 21 · 7 = 40 + 147 = 187 ✓

I passet	
Ringa in	Frågan, talen 29 och 187, och orden *”fem ljus”* och *”sju ljus”*.
Lyft ut	Vi vet: 29 stakar, 187 ljus, fem eller sju ljus i varje. Vi ska ta reda på: hur många av varje sort, två okända tal.
Ord och tal	Peka på bilden och reda ut femarmad och sjuarmad. Fråga: Vad räknar 29, och vad räknar 187?
Förutse	Eleverna prövar antal, ritar stakar, gör en tabell eller tänker sig alla femarmade först. Ett vanligt fel är 26 sjuarmade och 1 femarmad, som bara är 27 stakar.
Kör de fast	Föreslå: Prova hur många av varje sort det kan vara, och räkna ljusen. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att 10 sjuarmade gav 165 ljus och 19 gav 183. Försök använda det!
Säg inte	Börja med 29 femarmade och byt en i taget. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: 8 stakar och 46 ljus (3 sjuarmade). Större: Kan 30 stakar ge 187 ljus? (Nej: 187 − 150 = 37 är udda) Hur många lösningar finns det, om antalet stakar är fritt? (6: 1, 6, 11, 16, 21 eller 26 sjuarmade)
Jämför	En sjuarmad har två ljus mer än en femarmad. I A ger tio byten 20 ljus, och i B delar eleven de 42 ljusen med 2.
Fel eller osäker	En elev svarade 26 sjuarmade och 1 femarmad. Hur kan ni kontrollera det mot problemet? *”Är svaret 187?”* Hur kan ni kontrollera att det svarar på frågan?

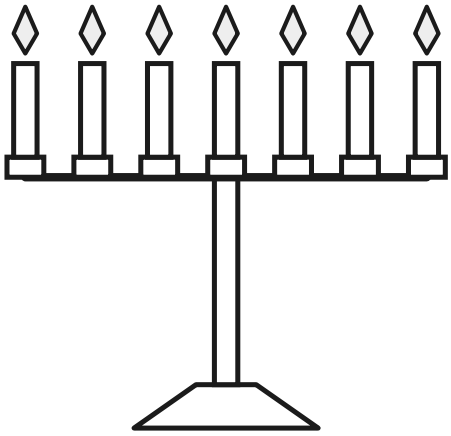
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Ljusstakarna

På ett slott finns 29 ljusstakar. Några av dem har plats för fem ljus, och några har plats för sju ljus. Sammanlagt behövs 187 ljus.



femarmad: 5 ljus



sjuarmad: 7 ljus

Frågan

Hur många ljusstakar finns det av varje sort?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Ljusstakarna

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

femarmade	sjuarmade	ljus ihop
29	0	145 för få
19	10	165
9	20	185 nästan!
8	21	187 ✓

Så räknade vi andra raden:

19 · 5 = 95

10 · 7 = 70

95 + 70 = 165

Lösning B



en sjuarmad: 2 ljus till

Om alla 29 vore femarmade:

29 · 5 = 145 ljus

↓

187 − 145 = 42 ljus saknas

↓

42 / 2 = 21 sjuarmade

↓

29 − 21 = 8 femarmade

Kontroll: 8 · 5 + 21 · 7
= 40 + 147 = 187 ✓

Frågor att prata om

1. Vad gör eleven i lösning A från rad till rad?
2. Varför räknar eleven i lösning B 187 − 145?
3. Var syns det i båda lösningarna att en sjuarmad har två ljus mer än en femarmad?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om det var många fler stakar, och varför?

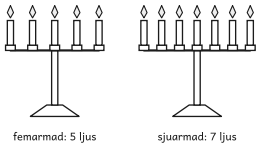
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Ljusstakarna

Problemet

På ett slott finns 29 ljusstakar. Några av dem har plats för fem ljus, och några har plats för sju ljus. Sammanlagt behövs 187 ljus.

Hur många ljusstakar finns det av varje sort?



Svaret: 8 femarmade och 21 sjuarmade.
Kontroll: 8 · 5 + 21 · 7 = 40 + 147 = 187, och 8 + 21 = 29.

Idén: *Två okända tal som hänger ihop: en sjuarmad har två ljus mer än en femarmad.*

Lösning A: byta tio i taget

femarmade	sjuarmade	ljus ihop
29	0	145 för få
19	10	165
9	20	185 nästan!
8	21	187 ✓

Så räknade vi andra raden:
19 · 5 = 95
10 · 7 = 70
95 + 70 = 165

Eleven prövar i en tabell och byter först tio stakar i taget och sedan en, tills ljusen blir 187.

Lösning B: alla är femarmade



Om alla 29 vore femarmade:
29 · 5 = 145 ljus
↓
187 − 145 = 42 ljus saknas
↓
42 / 2 = 21 sjuarmade
↓
29 − 21 = 8 femarmade

Kontroll: 8 · 5 + 21 · 7
= 40 + 147 = 187 ✓

Eleven tänker sig att alla 29 är femarmade och delar de 42 ljus som saknas med 2.

Lösning C: tankevurpa

26 · 7 = 182
182 + 5 = 187
Svar: 26 sjuarmade, 1 femarmad.

Stämmer med ljusen men inte med stakarna:
26 + 1 = 27, och det ska vara 29.
Fråga: ”Hur många stakar blir det i elevens svar?”

Frågor om tankarna bakom

1. Vad gör eleven i lösning A från rad till rad?
2. Varför räknar eleven i lösning B 187 − 145?
3. Var syns det i båda lösningarna att en sjuarmad har två ljus mer än en femarmad?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om det var många fler stakar, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Problemet kommer ur Lithner m.fl. (2025).

Lärarens sida: Bas, problem 6, Tornet

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

Moa bygger ett torn av kuber. Tornet har en stolpe i mitten och en trappa åt fyra håll. Tornet på bilden är 4 kuber högt.

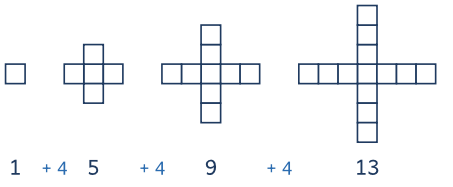
Hur många kuber behövs till tornet på bilden?

Hur många kuber behövs till ett torn som är 5 kuber högt?

Problemet handlar om att dela upp en figur av kuber, och om ett mönster som växer. Svaret är 28 kuber, och 45 när tornet är 5 kuber högt. Eleverna bygger, räknar lager för lager och ser en stolpe och fyra lika trappor. Material: multilinkkuber, 45 per par. Idén kommer ur Hagland, Hedrén och Taflin (2005) och Nämnaren 2024:2.

Lösning A

Lagren uppifrån:

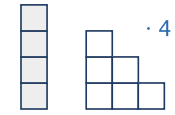


Varje lager har 4 kuber mer än lagret ovanför.

1 + 5 + 9 + 13 = 28 kuber ✓

Höjden 5: ett lager till med 13 + 4 = 17, och 28 + 17 = 45 kuber ✓

Lösning B



Stolpen: 4 kuber

En trappa: 1 + 2 + 3 = 6

↓

Fyra trappor: 4 · 6 = 24

↓

4 + 24 = 28 kuber ✓

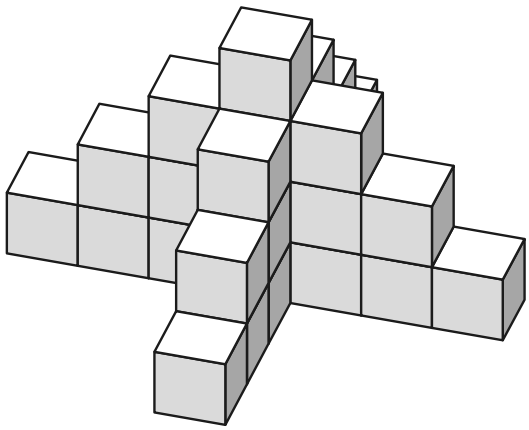
Höjden 5: en trappa har 1 + 2 + 3 + 4 = 10 kuber, och 5 + 4 · 10 = 45 kuber ✓

I passet	
Ringa in	Frågorna, talen 4 och 5, och orden stolpe, trappa och *”åt fyra håll”*.
Lyft ut	Vi vet: stolpen i mitten är 4 kuber hög, och fyra trappor går åt var sitt håll. Vi ska ta reda på: antalet kuber, när tornet är 4 och 5 kuber högt.
Ord och tal	Peka på stolpen och en trappa, och reda ut *”åt fyra håll”*. Fråga: Vad räknar 4 och 5? Hur många trappor finns det?
Förutse	Eleverna bygger med kuber, räknar lager eller räknar stolpen och trapporna var för sig. Någon räknar bara de kuber som syns.
Kör de fast	Föreslå: Bygg tornet med kuber och dela upp det. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att alla fyra trapporna är lika. Försök använda det!
Säg inte	Räkna stolpen för sig, räkna en trappa och ta den fyra gånger. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Ett torn som är 2 kuber högt, och sedan 3 (6 och 15 kuber). Större: Hur många kuber behövs till ett torn som är 10 kuber högt? (190) Hur kan ni räkna utan att bygga? (Stolpen och fyra trappor med 45 kuber var: 10 + 4 · 45 = 190)
Jämför	De fyra trapporna är lika. I A har varje lager 4 kuber mer än lagret ovanför, en i varje trappa, och i B tar eleven en trappa 4 gånger.
Fel eller osäker	Ni säger att det blir 13 kuber. Hur kan ni kontrollera att det stämmer med problemet? Ni säger 4 · 10 = 40 kuber till tornet som är 5 högt. Hur kan ni kontrollera det med tornet ni har byggt?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Tornet

Moa bygger ett torn av kuber. Tornet har en stolpe i mitten och en trappa åt fyra håll. Tornet på bilden är 4 kuber högt.



tornet, 4 kuber högt

Frågorna

1. Hur många kuber behövs till tornet på bilden?
2. Hur många kuber behövs till ett torn som är 5 kuber högt?

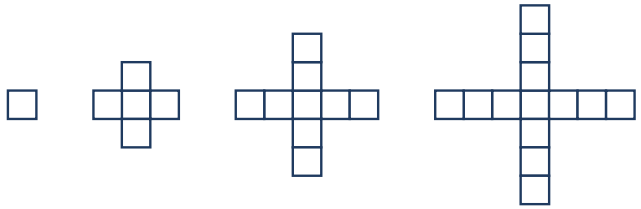
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Tornet

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

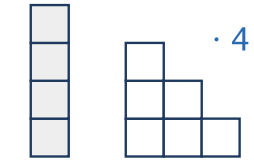
Lagren uppifrån:



Varje lager har 4 kuber mer än lagret ovanför.

1 + 5 + 9 + 13 = 28 kuber ✓

Höjden 5: ett lager till med 13 + 4 = 17,
och 28 + 17 = 45 kuber ✓



Lösning B

Stolpen: 4 kuber
En trappa: 1 + 2 + 3 = 6
↓
Fyra trappor: 4 · 6 = 24
↓
4 + 24 = 28 kuber ✓

Höjden 5: en trappa har
1 + 2 + 3 + 4 = 10 kuber, och
5 + 4 · 10 = 45 kuber ✓

Frågor att prata om

1. Vad räknar eleven i lösning A i varje lager, och hur växer lagren?
2. Varför räknar eleven i lösning B en trappa och tar den fyra gånger?
3. Var syns det i båda lösningarna att de fyra trapporna är lika?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja för ett torn som är 10 kuber högt, och varför?

Till läraren · I passet: Dela ut bladet i Jämföra, när paren har prövat. Lärarens sida säger vad som är lika i lösningarna.

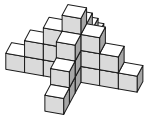
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Lösningsförslag · Algebra

Tornet

Problemet

Moa bygger ett torn av kuber. Tornet har en stolpe i mitten och en trappa åt fyra håll. Tornet på bilden är 4 kuber högt.



tornet, 4 kuber högt

Hur många kuber behövs till tornet på bilden?

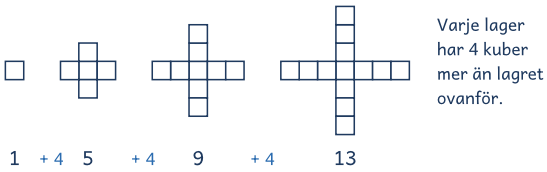
Hur många kuber behövs till ett torn som är 5 kuber högt?

Svaret: 28 kuber, och 45 kuber när tornet är 5 kuber högt.
Kontroll: Stolpe och trappor: $4 + 4 \cdot (1 + 2 + 3) = 28$ och $5 + 4 \cdot 10 = 45$.

Idén: *De fyra trapporna är lika, så varje lager har 4 kuber mer än lagret ovanför.*

Lösning A: lager för lager

Lagren uppifrån:



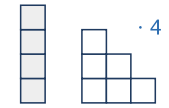
Varje lager har 4 kuber mer än lagret ovanför.

$1 + 5 + 9 + 13 = 28$ kuber ✓

Höjden 5: ett lager till med $13 + 4 = 17$, och $28 + 17 = 45$ kuber ✓

Eleven räknar lagren uppifrån, 1, 5, 9 och 13 kuber, och ser att varje lager har 4 kuber mer.

Lösning B: stolpen och fyra trappor



Stolpen: 4 kuber
En trappa: $1 + 2 + 3 = 6$
↓
Fyra trappor: $4 \cdot 6 = 24$
↓
$4 + 24 = 28$ kuber ✓

Höjden 5: en trappa har $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ kuber, och $5 + 4 \cdot 10 = 45$ kuber ✓

Eleven räknar stolpen för sig och en trappa, och tar trappan fyra gånger.

Lösning C: tankevurpa

$1 + 2 + 3 = 6$ och $4 \cdot 6 = 24$

$1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$4 \cdot 10 = 40$

Svar: 24 och 40 kuber.

Fyra trappor stämmer, men stolpen i mitten saknas: $24 + 4 = 28$ och $40 + 5 = 45$.

Fråga: ”Vilka kuber har eleven inte räknat?”

Frågor om tankarna bakom

1. Vad räknar eleven i lösning A i varje lager, och hur växer lagren?
2. Varför räknar eleven i lösning B en trappa och tar den fyra gånger?
3. Var syns det i båda lösningarna att de fyra trapporna är lika?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja för ett torn som är 10 kuber högt, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Hagland, Hedrén och Taflin (2005) och Nämnaren 2024:2.

Lärarens sida: Bas, problem 7, Matcherna

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

Fyra lag spelar bandy i en turnering. Varje lag spelar en match mot vart och ett av de andra lagen.

Hur många matcher blir det i turneringen?

Hur många matcher blir det, om 6 lag är med?

Problemet handlar om kombinatorik: hur många par som går att bilda av några lag. Svaret är 6 matcher med 4 lag och 15 matcher med 6 lag. Eleverna listar i ordning, ritar och ser att samma match inte ska räknas två gånger. Idén kommer ur Skolverkets Problembank för årskurs 4–6, Bandy.

Lösning A

6 lag:

AB AC AD AE AF	5
BC BD BE BF	4
CD CE CF	3
DE DF	2
EF	1

5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 ✓ matcher

4 lag:

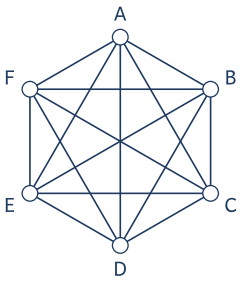
AB AC AD

BC BD

CD

3 + 2 + 1 = 6 ✓

Lösning B



Varje lag har 5 streck:

6 · 5 = 30

↓

Varje streck har två lag, så det är räknat två gånger:

↓

30 / 2 = 15 matcher ✓

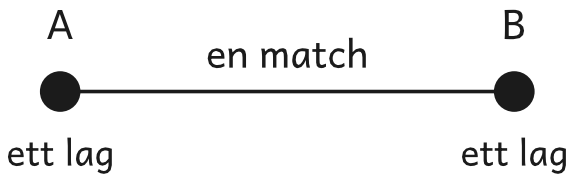
4 lag: 4 · 3 = 12
och 12 / 2 = 6 matcher ✓

I passet	
Ringa in	Frågorna, talen fyra och 6, och orden *”varje lag”*, *”en match”* och *”vart och ett”*.
Lyft ut	Vi vet: 4 lag, och varje lag spelar en match mot vart och ett av de andra lagen. Vi ska ta reda på: antalet matcher med 4 lag och med 6 lag.
Ord och tal	Reda ut turnering och match. Peka på prickarna och strecket: varje prick är ett lag, och strecket en match. Fråga: Vad räknar 4 och 6?
Förutse	Paren listar matcherna, ritar prickar med streck eller gör ett schema. Någon räknar lag A mot lag B och lag B mot lag A som två matcher.
Kör de fast	Föreslå: Skriv upp matcherna i en ordning, så att ingen saknas. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att lag A spelar 3 matcher. Försök använda det!
Säg inte	Varje match räknas två gånger, så dela med 2. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: 3 lag, och sedan 4 lag (3 och 6 matcher). Större: Hur många matcher blir det med 10 lag? (45) Hur många lag är med, om det blir 28 matcher? (8)
Jämför	Varje match är ett par lag, som bara räknas en gång. I lösning A står varje par en gång i listan, och i lösning B delas 30 med 2.
Fel eller osäker	Ni säger att det blir 12 matcher. Hur kan ni kontrollera att det stämmer med problemet? Ni säger att ni har alla 15. Hur kan ni kontrollera att ingen match saknas?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Matcherna

Fyra lag spelar bandy i en turnering. Varje lag spelar en match mot vart och ett av de andra lagen.



Frågorna

1. Hur många matcher blir det i turneringen?
2. Hur många matcher blir det, om 6 lag är med?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Matcherna

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

6 lag:

AB AC AD AE AF	5
BC BD BE BF	4
CD CE CF	3
DE DF	2
EF	1

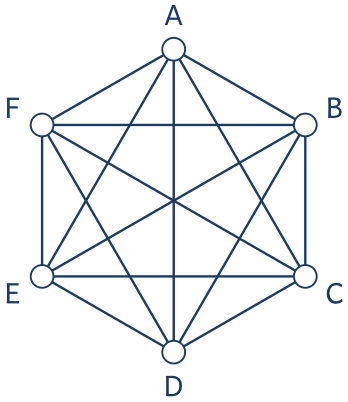
5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 ✓
matcher

4 lag:

AB AC AD	
BC BD	
CD	

3 + 2 + 1 = 6 ✓

Lösning B



Varje lag har 5 streck:
6 · 5 = 30
↓
Varje streck har två lag,
så det är räknat två gånger:
↓
30 / 2 = 15 matcher ✓

4 lag: 4 · 3 = 12
och 12 / 2 = 6 matcher ✓

Frågor att prata om

1. Varför skriver eleven i lösning A en match mindre på varje rad?
2. Varför delar eleven i lösning B 30 med 2?
3. Var syns det i båda lösningarna att lag A mot lag B och B mot A är samma match?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 10 lag, och varför?

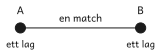
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Lösningsförslag · Sannolikhet och statistik

Matcherna

Problemet

Fyra lag spelar bandy i en turnering. Varje lag spelar en match mot vart och ett av de andra lagen.



Hur många matcher blir det i turneringen?

Hur många matcher blir det, om 6 lag är med?

Svaret: 6 matcher med 4 lag och 15 matcher med 6 lag.
Kontroll: AB, AC, AD, BC, BD och CD är 6 matcher, och 6 · 5 / 2 = 15.

Idén: *Varje match är ett par lag, som bara räknas en gång.*

Lösning A: en lista i ordning

6 lag:

AB AC AD AE AF	5
BC BD BE BF	4
CD CE CF	3
DE DF	2
EF	1

5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 ✓
matcher

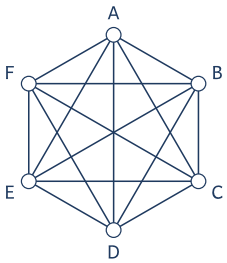
4 lag:

AB AC AD	
BC BD	
CD	

3 + 2 + 1 = 6 ✓

Eleven listar lag A:s matcher först, sedan B:s nya, och får en match mindre för varje lag.

Lösning B: prickar och streck



Varje lag har 5 streck:
6 · 5 = 30
↓
Varje streck har två lag, så det är räknat två gånger:
↓
30 / 2 = 15 matcher ✓

4 lag: 4 · 3 = 12
och 12 / 2 = 6 matcher ✓

Eleven drar 5 streck från varje lag och delar 30 med 2, eftersom varje streck räknas två gånger.

Lösning C: tankevurpa

Med 4 lag spelar varje lag 3.
4 · 3 = 12 och 6 · 5 = 30
Svar: 12 och 30 matcher.

Varje match är räknad två gånger, som A mot B och B mot A, och de är samma match.
Fråga: ”Hur kan ni kontrollera 12 med en lista?”

Frågor om tankarna bakom

1. Varför skriver eleven i lösning A en match mindre på varje rad?
2. Varför delar eleven i lösning B 30 med 2?
3. Var syns det i båda lösningarna att lag A mot lag B och B mot A är samma match?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 10 lag, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Lärarens sida: Bas, problem 8, Tärningarna

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

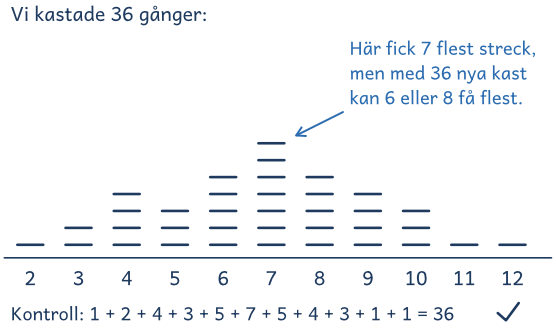
Sam och Ida kastar två vanliga tärningar, med 1 till 6 prickar. De lägger ihop prickarna och får kastets summa. Kastet på bilden har summan 4 + 6 = 10.

Vilken summa kommer oftast, om de kastar många gånger?

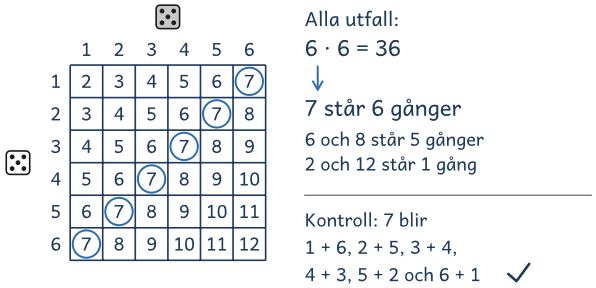
Hur kan ni visa att det är så?

Problemet handlar om chans: varför vissa summor kommer oftare än andra. Svaret är 7, som kommer i 6 av 36 utfall. Eleverna kastar, för streck och listar alla utfall, och ser att 3 + 4 och 4 + 3 är olika. Material: två tärningar i olika färg per par. Idén kommer ur Skolverkets Problembank för årskurs 4–6, Tärningar, och nrich.

Lösning A



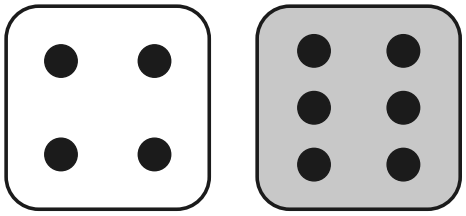
Lösning B



I passet	
Ringa in	Frågorna och orden *”två tärningar”*, *”lägger ihop”*, summa och oftast.
Lyft ut	Vi vet: två tärningar med 1 till 6 prickar, och summan är prickarna ihop. Vi ska ta reda på: vilken summa som kommer oftast, och varför.
Ord och tal	Reda ut summa med kastet på bilden, och vad oftast betyder. Fråga: Vilka summor kan ni få? Vilken är minst och vilken störst?
Förutse	Paren kastar och för streck, listar eller gör en tabell. Någon tror att alla summor är lika vanliga. I 36 kast får ofta en annan summa än 7 flest streck.
Kör de fast	Föreslå: Kasta tärningarna och skriv upp summorna. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att 7 kan bli 1 + 6 och 2 + 5. Försök använda det!
Säg inte	3 + 4 och 4 + 3 är olika kast, så räkna båda. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Två högar med korten 1, 2 och 3, och ett kort ur varje (4 är vanligast). Större: Vilka summor är lika vanliga? (Summor lika långt från 7, som 6 och 8) Vilken skillnad kommer oftast, det större talet minus det mindre? (1, i 10 av 36)
Jämför	7 kan bli på flest sätt, 6 av 36 i B. Jämför kasten i A och gruppens kast med de 36 utfallen. Med fler kast får 7 oftast flest streck, men det är inte säkert.
Fel eller osäker	Ni säger att 6, 7 och 8 går på 3 sätt var. Hur kan ni kontrollera det med en vit och en grå tärning? *”Är 7 rätt?”* Hur kan ni kontrollera det mot problemet?

Tärningarna

Sam och Ida kastar två vanliga tärningar, med 1 till 6 prickar. De lägger ihop prickarna och får kastets summa. Kastet på bilden har summan 4 + 6 = 10.



4 + 6 = 10

Frågorna

1. Vilken summa kommer oftast, om de kastar många gånger?
2. Hur kan ni visa att det är så?

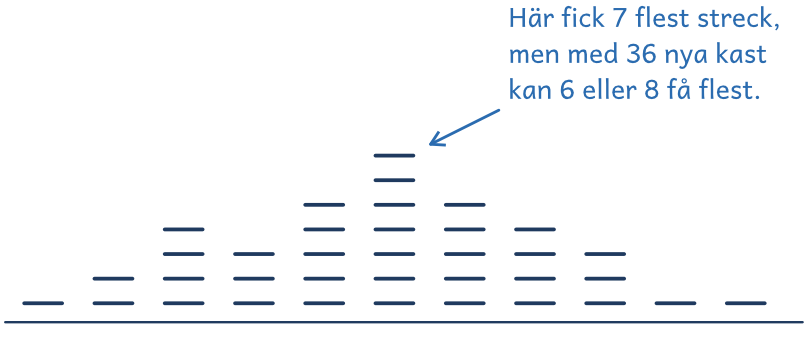
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Tärningarna

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

Vi kastade 36 gånger:



Kontroll: 1 + 2 + 4 + 3 + 5 + 7 + 5 + 4 + 3 + 1 + 1 = 36 ✓

Lösning B



	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	(7)
2	3	4	5	6	(7)	8
3	4	5	6	(7)	8	9
4	5	6	(7)	8	9	10
5	6	(7)	8	9	10	11
6	(7)	8	9	10	11	12

Alla utfall:

$6 \cdot 6 = 36$

↓

7 står 6 gånger

6 och 8 står 5 gånger

2 och 12 står 1 gång

Kontroll: 7 blir

1 + 6, 2 + 5, 3 + 4,

4 + 3, 5 + 2 och 6 + 1 ✓

Frågor att prata om

1. Vad gör eleven i lösning A, och vad visar strecken?
2. Varför står både 3 + 4 och 4 + 3 i tabellen i lösning B?
3. Var syns det i båda lösningarna att 7 är vanligast, och vilken visar varför?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med tre tärningar, och varför?

Till läraren · I passet: Dela ut bladet i Jämföra, när paren har prövat. Lärarens sida säger vad som är lika i lösningarna.

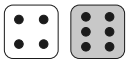
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Lösningsförslag · Sannolikhet och statistik

Tärningarna

Problemet

Sam och Ida kastar två vanliga tärningar, med 1 till 6 prickar. De lägger ihop prickarna och får kastets summa. Kastet på bilden har summan 4 + 6 = 10.



4 + 6 = 10

Vilken summa kommer oftast, om de kastar många gånger?

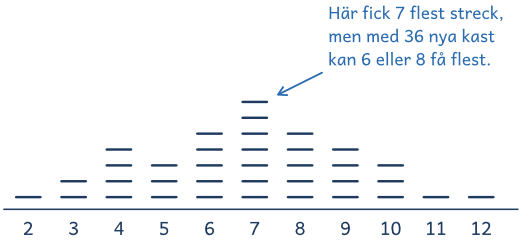
Hur kan ni visa att det är så?

Svaret: 7, som kommer i 6 av 36 utfall. En tabell med alla utfall visar det.
Kontroll: Av 6 · 6 = 36 utfall ger 6 summan 7, och 5 var ger summorna 6 och 8.

Idén: *Summan 7 kan bli på flest sätt, i 6 av de 36 utfallen.*

Lösning A: kasta och sätta streck

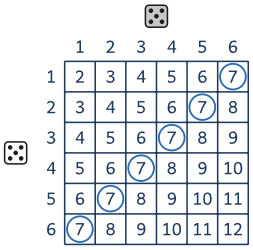
Vi kastade 36 gånger:



Kontroll: 1 + 2 + 4 + 3 + 5 + 7 + 5 + 4 + 3 + 1 + 1 = 36 ✓

Eleven kastar 36 gånger. Här fick 7 flest streck, men med 36 nya kast kan 6 eller 8 få flest.

Lösning B: alla möjliga utfall



	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	(7)
2	3	4	5	6	(7)	8
3	4	5	6	(7)	8	9
4	5	6	(7)	8	9	10
5	6	(7)	8	9	10	11
6	(7)	8	9	10	11	12

Alla utfall:
6 · 6 = 36
↓
7 står 6 gånger
6 och 8 står 5 gånger
2 och 12 står 1 gång

Kontroll: 7 blir
1 + 6, 2 + 5, 3 + 4,
4 + 3, 5 + 2 och 6 + 1 ✓

Eleven skriver summorna i en tabell med den vita och den grå tärningen, och 7 står sex gånger.

Lösning C: tankevurpa

7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4
6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3
8 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4
Svar: 6, 7 och 8 lika vanliga.

3 + 4 och 4 + 3 är olika kast, så 7 går på 6 sätt.
Fråga: ”Hur kan ni pröva elevens svar med en vit och en grå tärning?”

Frågor om tankarna bakom

1. Vad gör eleven i lösning A, och vad visar strecken?
2. Varför står både 3 + 4 och 4 + 3 i tabellen i lösning B?
3. Var syns det i båda lösningarna att 7 är vanligast, och vilken visar varför?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med tre tärningar, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Lärarens sida: Bas, problem 9, Parken

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

Nora och Elias går runt var sin park. Noras park är en kvadrat med sidan 50 m. Elias park är en rektangel som är 100 m lång och 50 m bred. De börjar samtidigt i punkten A, där parkerna möts, och går lika fort.

Hur många meter är det runt varje park?

Hur många varv har var och en gått, när de möts i A igen för första gången?

Problemet handlar om omkrets och om när två varv av olika längd går jämnt ut, vilket är idén bakom gemensamma multiplar. Parkerna är 200 m och 300 m runt. De möts i A efter 600 m, när Nora har gått 3 varv och Elias 2. Eleverna räknar omkretsen och hoppar på tallinjer. Idén kommer ur Känguru 2022, Ecolier nr 22.

Lösning A

Nora: 50 + 50 + 50 + 50 = 200 m
Elias: 100 + 50 + 100 + 50 = 300 m

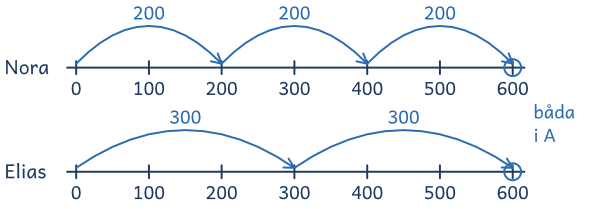
varv	Nora	Elias
1	200 m	300 m
2	400 m	600 m
3	600 m	900 m

Båda har gått 600 m och är i A.

Nora: 3 varv ✓
Elias: 2 varv ✓

Lösning B

Runt: 4 · 50 = 200 m och 2 · 100 + 2 · 50 = 300 m



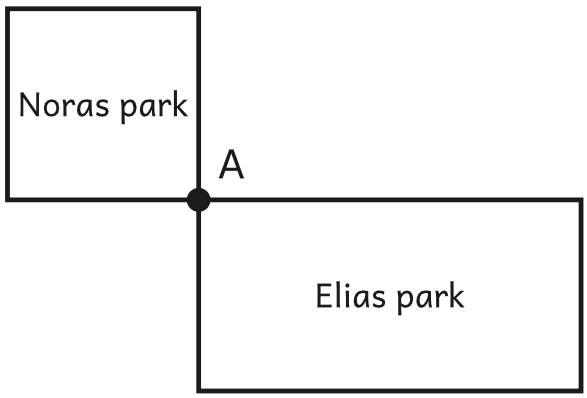
Nora: 600 / 200 = 3 varv Elias: 600 / 300 = 2 varv ✓

I passet	
Ringa in	Frågorna, måtten 50 m och 100 m, och orden runt, samtidigt, *”lika fort”* och *”i A igen”*.
Lyft ut	Vi vet: sidorna 50 m och 100 m, och att de går samtidigt och lika fort från A. Vi ska ta reda på: hur långt det är runt, och varven när de möts i A.
Ord och tal	Reda ut runt, varv och samtidigt. Följ en park runt med fingret från A. Fråga: Vad står 50 och 100 för?
Förutse	Paren räknar omkretsen först, gör en tabell med meter, följer bilden bit för bit eller hoppar på en tallinje. Någon svarar 2, som bara är Elias varv.
Kör de fast	Föreslå: Följ parkerna på bilden, en bit i taget. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att Nora är tillbaka i A efter 200 m. Försök använda det!
Säg inte	De möts när båda har gått 600 m. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Parkerna är 20 m och 30 m runt (de möts efter 60 m, 3 och 2 varv). Större: Om Elias park är 150 m lång och 100 m bred, när möts de i A då? (Efter 1 000 m: 5 och 2 varv)
Jämför	De möts i punkten A när båda har gått hela varv och lika långt. I lösning A står 600 i båda kolumnerna, och i lösning B landar bådas hopp på 600.
Fel eller osäker	Ni säger att Noras park är 50 m runt. Hur kan ni kontrollera att det stämmer med problemet? *”Är svaret 2 varv?”* Hur kan ni kontrollera att det svarar på frågan?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Parken

Nora och Elias går runt var sin park. Noras park är en kvadrat med sidan 50 m. Elias park är en rektangel som är 100 m lång och 50 m bred. De börjar samtidigt i punkten A, där parkerna möts, och går lika fort.



Frågorna

1. Hur många meter är det runt varje park?
2. Hur många varv har var och en gått, när de möts i A igen för första gången?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Parken

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

Nora: 50 + 50 + 50 + 50 = 200 m
Elias: 100 + 50 + 100 + 50 = 300 m

varv	Nora	Elias
1	200 m	300 m
2	400 m	600 m
3	600 m	900 m

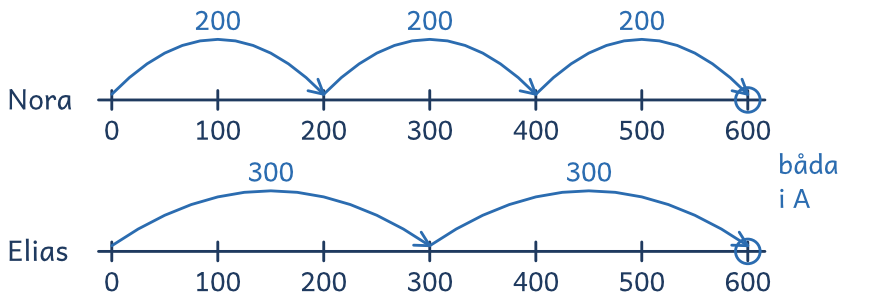
Båda har gått 600 m och är i A.

Nora: 3 varv ✓

Elias: 2 varv ✓

Lösning B

Runt: 4 · 50 = 200 m och 2 · 100 + 2 · 50 = 300 m



Nora: 600 / 200 = 3 varv

Elias: 600 / 300 = 2 varv ✓

Frågor att prata om

1. Vad skriver eleven i lösning A på varje rad i tabellen?
2. Varför letar eleven i lösning B efter det första talet där båda landar?
3. Var syns 600 m i båda lösningarna, och varför möts de i A just då?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om parkerna var 400 m och 600 m runt, och varför?

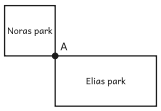
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Lösningsförslag · Geometri

Parken

Problemet

Nora och Elias går runt var sin park. Noras park är en kvadrat med sidan 50 m. Elias park är en rektangel som är 100 m lång och 50 m bred. De börjar samtidigt i punkten A, där parkerna möts, och går lika fort.



Hur många meter är det runt varje park?

Hur många varv har var och en gått, när de möts i A igen för första gången?

Svaret: Parkerna är 200 m och 300 m runt. Nora går 3 varv och Elias 2.
Kontroll: 4 · 50 = 200, 2 · 100 + 2 · 50 = 300, och 3 · 200 = 2 · 300 = 600.

Idén: *De möts i punkten A när båda har gått hela varv och lika långt.*

Lösning A: meter efter varje varv

Nora: 50 + 50 + 50 + 50 = 200 m
Elias: 100 + 50 + 100 + 50 = 300 m

varv	Nora	Elias
1	200 m	300 m
2	400 m	600 m
3	600 m	900 m

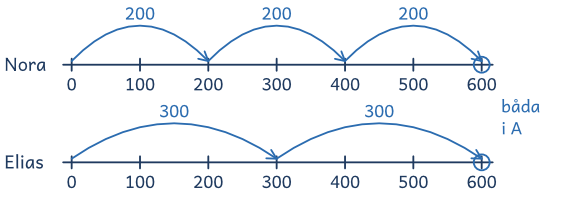
Båda har gått 600 m och är i A.

Nora: 3 varv ✓
Elias: 2 varv ✓

Eleven skriver hur långt var och en har gått efter varje varv, tills samma tal står hos båda.

Lösning B: hopp på tallinjer

Runt: 4 · 50 = 200 m och 2 · 100 + 2 · 50 = 300 m



Nora: 600 / 200 = 3 varv Elias: 600 / 300 = 2 varv ✓

Eleven hoppar 200 m och 300 m i taget på två tallinjer och letar efter första talet där båda landar.

Lösning C: tankevurpa

Nora: 4 · 50 = 200 m

Elias: 2 · 100 + 2 · 50 = 300 m

2 · 300 = 600

Svar: 200 m, 300 m och 2 varv.

Omkretsen stämmer, men 2 varv är bara Elias varv. Nora har gått 600 / 200 = 3 varv.
Fråga: ”Var är Elias när Nora har gått 2 varv?”

Frågor om tankarna bakom

1. Vad skriver eleven i lösning A på varje rad i tabellen?
2. Varför letar eleven i lösning B efter det första talet där båda landar?
3. Var syns 600 m i båda lösningarna, och varför möts de i A just då?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om parkerna var 400 m och 600 m runt, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Känguru 2022, Ecolier nr 22.

Lärarens sida: Bas, problem 10, Vågen

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

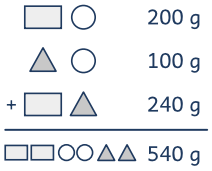
Lina har tre klossar: en rektangel, en cirkel och en triangel. Hon väger två klossar i taget. Rektangeln och cirkeln väger 200 g. Triangeln och cirkeln väger 100 g. Rektangeln och triangeln väger 240 g.

Hur mycket väger alla tre klossarna tillsammans?

Hur mycket väger varje kloss?

Problemet handlar om likheter: tre okända vikter som hänger ihop två och två. Svaret är 270 g, och rektangeln väger 170 g, cirkeln 30 g och triangeln 70 g. Eleverna lägger ihop och jämför vägningar, och ser att varje kloss står på två vågar. Idén kommer ur Känguru 2024, Ecolier nr 19.

Lösning A



200 + 100 + 240 = 540 g

Varje kloss är med två gånger.

Alla tre:

540 / 2 = 270 g ✓

↓

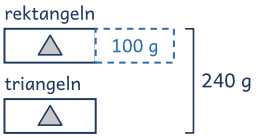
Varje kloss:

cirkeln 270 − 240 = 30 g

triangeln 270 − 200 = 70 g

rektangeln 270 − 100 = 170 g

Lösning B



Båda vågarna med cirkeln:

200 − 100 = 100 g

mer för rektangeln

↓

240 − 100 = 140 g

är två trianglar

↓

140 / 2 = 70 g triangeln

70 + 100 = 170 g rektangeln

100 − 70 = 30 g cirkeln

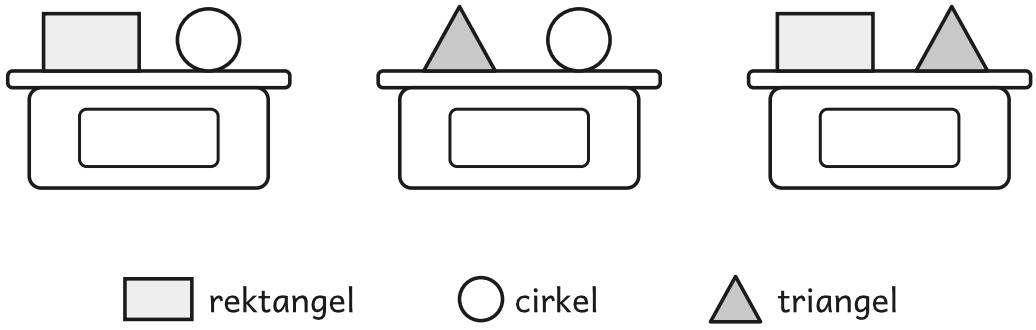
Alla tre: 170 + 70 + 30 = 270 g ✓

I passet	
Ringa in	Frågorna, talen 200, 100 och 240, och orden *”två i taget”*, *”alla tre”* och *”varje kloss”*.
Lyft ut	Vi vet: rektangel och cirkel 200 g, triangel och cirkel 100 g, rektangel och triangel 240 g. Vi ska ta reda på: alla tre ihop, och varje kloss.
Ord och tal	Visa rektangeln, cirkeln och triangeln på bilden, och vågarna, som visar två klossar ihop. Fråga: Vad väger 200 g?
Förutse	Paren prövar vikter, jämför vågarna två och två eller lägger ihop allt först. Någon svarar 540 g.
Kör de fast	Föreslå: Gissa vad cirkeln väger, och pröva gissningen på vågarna. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att rektangeln väger 100 g mer än triangeln. Försök använda det!
Säg inte	Lägg ihop vågarna, så är varje kloss med två gånger. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Vågarna visar 50 g, 30 g och 60 g (70 g, rektangeln 40, cirkeln 10 och triangeln 20). Större: Vågarna visar 300 g, 200 g och 300 g. Vad väger alla tre, och varje kloss? (400 g, rektangeln 200 och de andra 100 var)
Jämför	Varje kloss står på två vågar. I A är därför 540 g två av varje kloss, och i B ger de två vågarna med cirkeln skillnaden 100 g.
Fel eller osäker	Ni säger att alla tre väger 540 g. Hur kan ni kontrollera att det stämmer med problemet? *”Väger cirkeln 30 g?”* Hur kan ni kontrollera det på alla tre vågarna?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Vågen

Lina har tre klossar: en rektangel, en cirkel och en triangel. Hon väger två klossar i taget. Rektangeln och cirkeln väger 200 g. Triangeln och cirkeln väger 100 g. Rektangeln och triangeln väger 240 g.



Frågorna

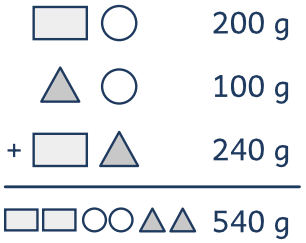
1. Hur mycket väger alla tre klossarna tillsammans?
2. Hur mycket väger varje kloss?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Vågen

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A



200 + 100 + 240 = 540 g

Varje kloss är med två gånger.

Alla tre:

540 / 2 = 270 g ✓

↓

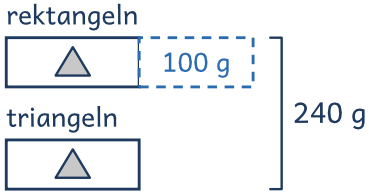
Varje kloss:

cirkeln 270 − 240 = 30 g

triangeln 270 − 200 = 70 g

rektangeln 270 − 100 = 170 g

Lösning B



Båda vågarna med cirkeln:

200 − 100 = 100 g

mer för rektangeln

↓

240 − 100 = 140 g

är två trianglar

↓

140 / 2 = 70 g triangeln

70 + 100 = 170 g rektangeln

100 − 70 = 30 g cirkeln

Alla tre: 170 + 70 + 30 = 270 g ✓

Frågor att prata om

1. Vad lägger eleven ihop i lösning A, och vad är 540 g?
2. Varför räknar eleven i lösning B 200 − 100?
3. Var syns det i båda lösningarna att varje kloss står på två vågar?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med fyra klossar, och varför?

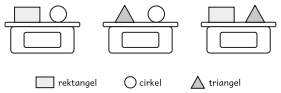
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Lösningsförslag · Algebra

Vågen

Problemet

Lina har tre klossar: en rektangel, en cirkel och en triangel. Hon väger två klossar i taget. Rektangeln och cirkeln väger 200 g. Triangeln och cirkeln väger 100 g. Rektangeln och triangeln väger 240 g.



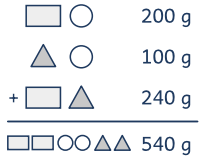
Hur mycket väger alla tre klossarna tillsammans?

Hur mycket väger varje kloss?

Svaret: 270 g. Rektangeln väger 170 g, cirkeln 30 g och triangeln 70 g.
Kontroll: 170 + 30 = 200, 70 + 30 = 100, 170 + 70 = 240 och 170 + 30 + 70 = 270.

Idén: *Tre okända vikter som hänger ihop: varje kloss står på två vågar.*

Lösning A: Lägga ihop vågarna



200 + 100 + 240 = 540 g

Varje kloss är med två gånger.

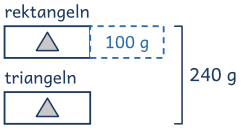
Alla tre:
540 / 2 = 270 g ✓

↓

Varje kloss:
cirkeln 270 − 240 = 30 g
triangeln 270 − 200 = 70 g
rektangeln 270 − 100 = 170 g

Eleven lägger ihop alla tre vågarna, 540 g, och delar med 2 eftersom varje kloss är med två gånger.

Lösning B: Jämföra vågarna



Båda vågarna med cirkeln:
200 − 100 = 100 g
mer för rektangeln
↓
240 − 100 = 140 g
är två trianglar
↓
140 / 2 = 70 g triangeln
70 + 100 = 170 g rektangeln
100 − 70 = 30 g cirkeln

Alla tre: 170 + 70 + 30 = 270 g ✓

Eleven jämför de två vågarna med cirkeln och ser att rektangeln väger 100 g mer än triangeln.

Lösning C: Tankevurpa

Vågarna: 200, 100 och 240 g
200 + 100 + 240 = 540
Svar: Alla tre väger 540 g.

Varje kloss står på två vågar, så 540 g är alla tre klossarna två gånger.
Fråga: ”Hur kan ni kontrollera 540 g mot vågarna?”

Frågor om tankarna bakom

1. Vad lägger eleven ihop i lösning A, och vad är 540 g?
2. Varför räknar eleven i lösning B 200 − 100?
3. Var syns det i båda lösningarna att varje kloss står på två vågar?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med fyra klossar, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Lärarens sidor: Medel

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Här står problemen på nivån Medel, som ligger nära åk 6–7, i den ordning gruppen tar dem. Varje problem har lärarens sida, problemets sida, bladet Två lösningar och ett lösningsförslag.

Problemet	Matematiken	Lösning A	Lösning B
1. Glasspinnarna	trianglar, och att hitta alla	Rita eller bygg: lägg och sortera trianglar	Gör en lista efter benen
2. Borden	mönster och uttryck	Gör en tabell: 4 platser till per bord	Skriv ett uttryck: 4 per bord och ändarna
3. Kulpåsarna	chans som andel	andelen blå i varje påse	röda på varje blå
4. Bollbytet	proportionalitet, flera svar	Gör en tabell: golfbollar som byts mot tennisbollar	Tänk dig att alla är av samma sort: byt allt mot pingis först
5. Tangrammet	area och bråk	Rita eller bygg: lägg bitarna på varandra	Rita eller bygg: 16 små trianglar
6. Skolan	bråk, procent och delbarhet	Pröva och förbättra i en tabell	delbart med 3 och med 5, alltså med 15
7. Samlarbilderna	medelvärde, median och typvärde	Pröva och förbättra: fem tal i ordning	börja med de tal som måste stå
8. Klädaffären	likheter och byten	räkna allt i kepsar	välj ett pris på en keps
9. Pantpengarna	bråk av det som är kvar	Räkna baklänges med staplar	Pröva och förbättra i en tabell
10. Smörgåsarna	bråk och rättvis delning	Rita eller bygg: smörgåsar i tredjedelar	räkna med bråk

Så använder du problemen	
Ordningen	Ta problemen i ordning, ett per pass, och byt ordning när gruppen behöver arbeta med ett annat område eller ett problem som liknar det förra. De första är lättast att börja på.
Kopiorna	Kopiera problemets sida till varje par, eller visa den på tavlan. I Jämföra får varje par bladet Två lösningar, med B under ett papper tills gruppen har sagt vad A gör.

© Niclas Fohlin. Ur Problemlösning i grupp, https://niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp.

Lärarens sida: Medel, problem 1, Glasspinnarna

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

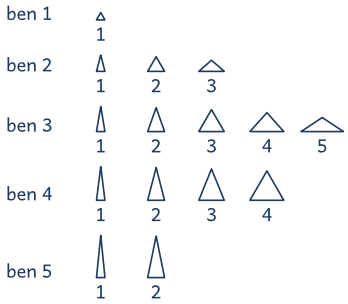
Lisa har 12 glasspinnar som är lika långa. Hon lägger likbenta trianglar på bordet, en i taget, och behöver inte använda alla pinnar. Varje sida är en eller flera hela pinnar. En liksidig triangel räknas också som likbent. Trianglar med samma form men olika storlek räknas som olika.

Hur många olika likbenta trianglar kan Lisa lägga?

Hur kan ni vara säkra på att ni har hittat alla?

Problemet handlar om trianglar och om att veta att man har hittat alla. Svaret är 15 likbenta trianglar, och fyra av dem är liksidiga. Eleverna prövar när tre sidor går ihop till en triangel och ordnar sina trianglar så att ingen saknas eller räknas två gånger. Material: glasspinnar, 12 per par. Idén kommer ur Nämnaren 2025:4, problem 4490.

Lösning A



Gick inte:
2, 2, 4
blev platt

5, 5, 3
5 + 5 + 3 = 13
för många

1 + 3 + 5 + 4 + 2 = 15 ✓

Lösning B

Basen är kortare än benen tillsammans.
Alla pinnar ihop: högst 12.

ben	basen kan vara	antal
1	1	1
2	1, 2, 3	3
3	1, 2, 3, 4, 5	5
4	1, 2, 3, 4	4
5	1, 2	2
6	ingen	0

→ Ben 4:
4 + 4 = 8
12 − 8 = 4
basen högst 4

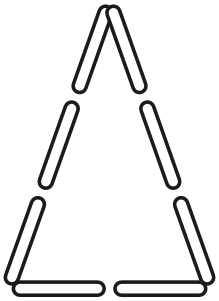
1 + 3 + 5 + 4 + 2 = 15 ✓

I passet	
Ringa in	Frågorna, talet 12, och orden likbent, liksidig, *”hela pinnar”* och olika.
Lyft ut	Vi vet: 12 lika långa pinnar, minst två sidor lika långa, hela pinnar. Vi ska ta reda på: hur många olika trianglar, och hur vi vet att vi har alla.
Ord och tal	Reda ut likbent, ben och bas med bilden, och visa den som inte går ihop. Fråga: Vad räknar 12? Är 3, 3, 2 och 2, 3, 3 olika?
Förutse	Paren lägger och ritar pinnar, gör en lista utan ordning eller en tabell efter benen. Någon räknar med platta trianglar, som 2, 2, 4.
Kör de fast	Föreslå: Lägg en triangel och skriv upp sidorna. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att 2, 2, 4 blev platt. Försök använda det!
Säg inte	Gå igenom benen från 1 till 5, och låt basen vara kortare än benen tillsammans. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Högst 6 pinnar (3 trianglar). Större: Hur många trianglar går med högst 12 pinnar, om sidorna får vara olika långa? (18, de 15 likbenta och 3 till) Hur många likbenta går med högst 20 pinnar? (45)
Jämför	Basen är kortare än benen tillsammans, och pinnarna är högst 12. A hittar villkoren genom att bygga, och B skriver dem som en regel. Ordningen efter benen visar att ingen saknas.
Fel eller osäker	Ni säger att 3, 3, 2 och 2, 3, 3 är två trianglar. Hur kan ni kontrollera det med pinnarna? *”Är det alla nu?”* Hur kan ni kontrollera att ingen saknas?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Glasspinnarna

Lisa har 12 glasspinnar som är lika långa. Hon lägger likbenta trianglar på bordet, en i taget, och behöver inte använda alla pinnar. Varje sida är en eller flera hela pinnar. En liksidig triangel räknas också som likbent. Trianglar med samma form men olika storlek räknas som olika.



en likbent triangel



går inte ihop

Frågorna

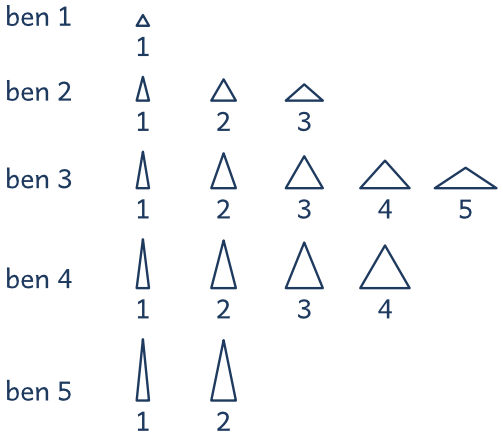
1. Hur många olika likbenta trianglar kan Lisa lägga?
2. Hur kan ni vara säkra på att ni har hittat alla?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Glasspinnarna

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A



Gick inte:

2, 2, 4
blev platt

5, 5, 3
5 + 5 + 3 = 13
för många

1 + 3 + 5 + 4 + 2 = 15 ✓

Lösning B

Basen är kortare än benen tillsammans.
Alla pinnar ihop: högst 12.

ben	basen kan vara	antal
1	1	1
2	1, 2, 3	3
3	1, 2, 3, 4, 5	5
4	1, 2, 3, 4	4
5	1, 2	2
6	ingen	0

→ Ben 4:
4 + 4 = 8
12 − 8 = 4
basen högst 4

1 + 3 + 5 + 4 + 2 = 15 ✓

Frågor att prata om

1. Hur sorterar eleven trianglarna i lösning A?
2. Varför skriver eleven i lösning B att basen är högst 4 när benen är 4?
3. Var syns det i båda lösningarna att basen måste vara kortare än benen tillsammans?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 30 pinnar, och varför?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Lösningsförslag · Geometri

Glasspinnarna

Problemet

Lisa har 12 glasspinnar som är lika långa. Hon lägger likbenta trianglar på bordet, en i taget, och behöver inte använda alla pinnar. Varje sida är en eller flera hela pinnar. En liksidig triangel räknas också som likbent. Trianglar med samma form men olika storlek räknas som olika.



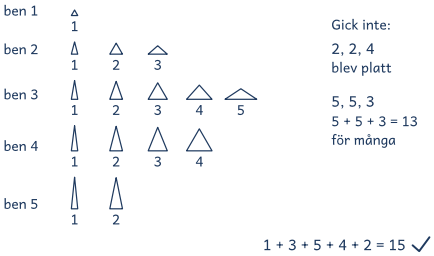
Hur många olika likbenta trianglar kan Lisa lägga?

Hur kan ni vara säkra på att ni har hittat alla?

Svaret: 15 likbenta trianglar, varav fyra liksidiga. En lista efter benen visar att ingen saknas.
Kontroll: Benen 1 till 5 ger 1 + 3 + 5 + 4 + 2 = 15, och ben 6 ger ingen bas.

Idén: *Basen är kortare än benen tillsammans, och pinnarna är högst 12.*

Lösning A: bygga och sortera



Eleven lägger trianglar, ritar dem som går ihop och sorterar dem efter benen från 1 till 5.

Lösning B: en lista efter benen

Basen är kortare än benen tillsammans.
Alla pinnar ihop: högst 12.

ben	basen kan vara	antal
1	1	1
2	1, 2, 3	3
3	1, 2, 3, 4, 5	5
4	1, 2, 3, 4	4
5	1, 2	2
6	ingen	0

Ben 4:
→ 4 + 4 = 8
12 − 8 = 4
basen högst 4

1 + 3 + 5 + 4 + 2 = 15 ✓

Eleven skriver villkoren först och räknar för varje ben vilka baser som går.

Lösning C: tankevurpa

Ben 1: bas 1, 2. Ben 2: bas 1–4
Ben 3: bas 1–6. Ben 4: bas 1–4
Ben 5: bas 1, 2. Det blir 18.
Svar: 18 likbenta trianglar.

Eleven räknar med platta trianglar, som 3, 3, 6, där basen är lika lång som benen tillsammans.
Fråga: ”Hur ser 3, 3, 6 ut när ni lägger den?”

Frågor om tankarna bakom

1. Hur sorterar eleven trianglarna i lösning A?
2. Varför skriver eleven i lösning B att basen är högst 4 när benen är 4?
3. Var syns det i båda lösningarna att basen måste vara kortare än benen tillsammans?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 30 pinnar, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Nämnaren 2025:4, problem 4490.

Lärarens sida: Medel, problem 2, Borden

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

I matsalen står sexkantiga bord i en lång rad. Två bord som står bredvid varandra delar en sida. Vid varje fri sida får en person sitta.

Hur många personer får plats vid 10 bord?

Hitta en regel som gäller för alla antal bord.

Problemet handlar om ett mönster som växer lika mycket för varje bord. Vid 10 bord får 42 personer plats, och vid n bord 4 · n + 2. Eleverna ser mönstret i en tabell och i bilden och skriver en regel med ord eller med n. Idén kommer ur Nämnaren 2025:2, problem 4476.

Lösning A

bord	personer	
1	6	
2	10	+4
3	14	+4
4	18	+4
5	22	+4

Från 1 till 10 bord är 9 steg med +4:

$6 + 9 \cdot 4 = 42$ ✓

Regel: 6, och sedan 4 till för varje bord.

Lösning B



$4 + 4 + 4 + 2 = 14$

Varje bord: 4 platser, 2 uppe och 2 nere.

Ändarna: 1 + 1.

10 bord: $4 \cdot 10 + 2 = 42$ ✓

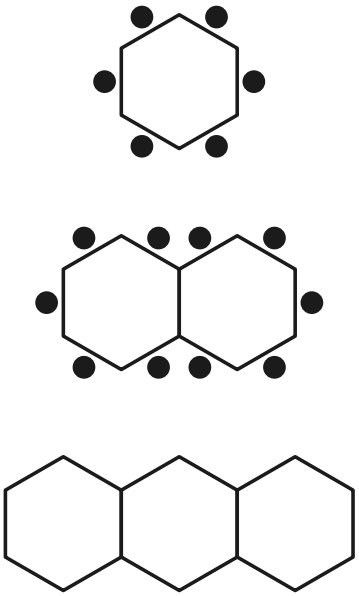
n bord: $4 \cdot n + 2$

I passet	
Ringa in	Frågorna, talet 10, och orden sexkantiga, *”delar en sida”* och *”fri sida”*.
Lyft ut	Vi vet: sexkantiga bord i rad, två bord delar en sida, en person vid varje fri sida. Vi ska ta reda på: hur många vid 10 bord, och en regel.
Ord och tal	Reda ut sexkantig och fri sida med bilden. Fråga: Vad räknar 10, och vad räknar prickarna?
Förutse	Paren ritar bord, gör en tabell med 6, 10 och 14 eller ser 4 vid varje bord. Någon räknar 10 · 6 = 60 eller glömmer ändarna.
Kör de fast	Föreslå: Rita platserna vid tre bord och räkna dem. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att det blir 4 fler för varje bord. Försök använda det!
Säg inte	Varje bord har fyra platser, och så kommer en i varje ände. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: 4 bord (18 personer). Större: Kan en rad bord ha exakt 100 platser? (Nej: 24 bord ger 98 och 25 bord 102) Hur många bord behövs för en klass med 27 elever? (7, eftersom 6 bord ger 26)
Jämför	Varje nytt bord ger fyra platser till, två uppe och två nere. I A syns det som +4 i tabellen, och i B som 4 vid varje bord.
Fel eller osäker	Ni säger att 10 bord ger dubbelt så många som 5 bord, alltså 44. Hur kan ni kontrollera det mot bilden? *”Stämmer regeln?”* Hur kan ni kontrollera den med 3 bord?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Borden

I matsalen står sexkantiga bord i en lång rad. Två bord som står bredvid varandra delar en sida. Vid varje fri sida får en person sitta.



Frågorna

1. Hur många personer får plats vid 10 bord?
2. Hitta en regel som gäller för alla antal bord.

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Borden

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

bord	personer	
1	6	
2	10	+4
3	14	+4
4	18	+4
5	22	+4

Från 1 till 10 bord är 9 steg med +4:

$6 + 9 \cdot 4 = 42$ ✓

Regel: 6, och sedan 4 till för varje bord.

Lösning B



Varje bord: 4 platser, 2 uppe och 2 nere.

Ändarna: 1 + 1.

$4 + 4 + 4 + 2 = 14$

10 bord: $4 \cdot 10 + 2 = 42$ ✓

n bord: $4 \cdot n + 2$

Frågor att prata om

1. Vad gör eleven i lösning A från rad till rad?
2. Varför lägger eleven i lösning B till 2 efter $4 \cdot 10$?
3. Var syns det i båda lösningarna att varje nytt bord ger fyra platser till?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja för 100 bord, och varför?

Till läraren · I passet: Dela ut bladet i Jämföra, när paren har prövat. Lärarens sida säger vad som är lika i lösningarna.

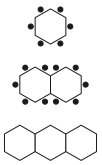
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

LÖSNINGSFÖRSLAG · ALGEBRA

BORDEN

PROBLEMET

I matsalen står sexkantiga bord i en lång rad. Två bord som står bredvid varandra delar en sida. Vid varje fri sida får en person sitta.



Hur många personer får plats vid 10 bord?

Hitta en regel som gäller för alla antal bord.

Svaret: 42 personer vid 10 bord, och 4 · n + 2 vid n bord.
Kontroll: 4 · 1 + 2 = 6 och 4 · 2 + 2 = 10 som i bilden, och 4 · 10 + 2 = 42.

IDÉN: *Varje nytt bord ger fyra platser till, två uppe och två nere.*

LÖSNING A: RÄKNA STEG OM 4

bord	personer	
1	6	
2	10	+4
3	14	+4
4	18	+4
5	22	+4

Från 1 till 10 bord är 9 steg med +4:

6 + 9 · 4 = 42 ✓

Regel: 6, och sedan 4 till för varje bord.

Eleven ser att det blir 4 personer till för varje bord och räknar 9 steg från 6.

LÖSNING B: RÄKNA PLATSERNA



Varje bord: 4 platser, 2 uppe och 2 nere.

Ändarna: 1 + 1.

4 + 4 + 4 + 2 = 14

10 bord: 4 · 10 + 2 = 42 ✓

n bord: 4 · n + 2

Eleven ser fyra platser vid varje bord och en plats i varje ände, och skriver 4 · n + 2.

LÖSNING C: TANKEVURPA

6, 10, 14, 18, 22

5 bord ger 22 personer.

10 bord: 2 · 22 = 44

Svar: 44 personer.

Två rader med 5 bord har fyra ändar, men en rad med 10 bord har två: 44 − 2 = 42.

Fråga: ”Hur kan ni kontrollera 44 med en ritning?”

FRÅGOR OM TANKARNA BAKOM

1. Vad gör eleven i lösning A från rad till rad?
2. Varför lägger eleven i lösning B till 2 efter 4 · 10?
3. Var syns det i båda lösningarna att varje nytt bord ger fyra platser till?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja för 100 bord, och varför?

VISA OCH JÄMFÖR LÖSNINGAR

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Nämnaren 2025:2, problem 4476.

Lärarens sida: Medel, problem 3, Kulpåsarna

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

I tre påsar finns röda och blå kulor. Påse A har 80 röda och 20 blå. Påse B har 30 röda och 10 blå. Påse C har 18 röda och 2 blå. Du tar en kula ur en påse utan att titta.

Vilken påse ger störst chans att få en blå kula, och varför?

Problemet handlar om chans som en andel av alla kulor. Svaret är påse B, där 1/4 av kulorna är blå. Eleverna jämför andelar som bråk eller procent, eller röda mot blå, och ser att flest blå eller färst röda inte ger störst chans. Idén kommer ur Problembanken åk 7–9, problem 11, Kulpåsen.

Lösning A

påse	blå	alla	andel blå
A	20	100	20 %
B	10	40	25 %
C	2	20	10 %

Så räknade vi påse B:
30 + 10 = 40
10 / 40 = 1/4
1/4 = 25/100
alltså 25 %

25 % är störst: påse B. ✓

Lösning B

Hur många röda på varje blå? ● blå ○ röd

A: 80 / 20 = 4 ●○○○○

B: 30 / 10 = 3 ●○○○

C: 18 / 2 = 9 ●○○○○○○○○○

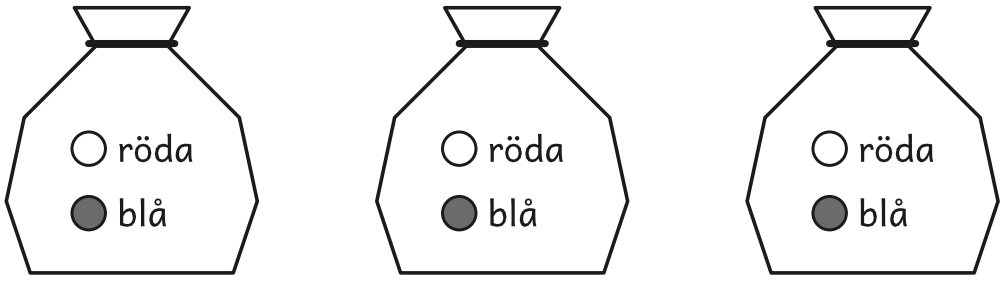
Färre röda på varje blå ger större chans.
Påse B är bäst. ✓

I passet	
Ringa in	Frågan, talen för varje påse, och orden chans och *”blå kula”*.
Lyft ut	Vi vet: hur många röda och blå kulor det finns i varje påse. Vi ska ta reda på: vilken påse som ger störst chans för blå, och varför.
Ord och tal	Visa bilden. Fråga: Vad betyder chans? Vad räknar 20 i påse A, och hur många kulor finns det i den?
Förutse	Bråk eller procent av alla kulor, röda mot blå, eller kulor som ritas. Några väljer påse A, som har flest blå, eller C, som har färst röda.
Kör de fast	Föreslå: Gör en tabell med det ni vet om varje påse. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att A har 100 kulor och 20 blå. Försök använda det!
Säg inte	Räkna hur stor del av alla kulor som är blå. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Påse A har 12 röda och 3 blå, påse B 6 och 2, och påse C 4 och 1 (påse B). Större: Hur många blå måste ni lägga i påse C för att den ska ge samma chans som påse B? (4, så att 6 av 24 är blå)
Jämför	Chansen beror på hur stor del av kulorna som är blå. A räknar andelen, och i B betyder 3 röda på varje blå att 1 av 4 är blå.
Fel eller osäker	Ni säger att påse A är bäst, för den har flest blå. Hur kan ni kontrollera det mot problemet? Ni säger att påse C är bäst, för den har färst röda. Hur kan ni kontrollera det mot problemet?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Kulpåsarna

I tre påsar finns röda och blå kulor. Påse A har 80 röda och 20 blå. Påse B har 30 röda och 10 blå. Påse C har 18 röda och 2 blå. Du tar en kula ur en påse utan att titta.



påse A påse B påse C

Frågan

Vilken påse ger störst chans att få en blå kula, och varför?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Kulpåsarna

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

påse	blå	alla	andel blå
A	20	100	20 %
B	10	40	25 %
C	2	20	10 %

Så räknade vi påse B:

30 + 10 = 40

10 / 40 = 1/4

1/4 = 25/100

alltså 25 %

25 % är störst: påse B. ✓

Lösning B

Hur många röda på varje blå? ● blå ○ röd

A: 80 / 20 = 4 ●○○○○

B: 30 / 10 = 3 ●○○○

C: 18 / 2 = 9 ●○○○○○○○○○

Färre röda på varje blå ger större chans.

Påse B är bäst. ✓

Frågor att prata om

1. Vad räknar eleven ut för varje påse i lösning A?
2. Varför delar eleven i lösning B de röda med de blå?
3. Var syns det i båda lösningarna att påse B är bäst, fast påse A har fler blå?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om talen inte gick att dela jämnt, och varför?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Kulpåsarna

Problemet

I tre påsar finns röda och blå kulor. Påse A har 80 röda och 20 blå. Påse B har 30 röda och 10 blå. Påse C har 18 röda och 2 blå. Du tar en kula ur en påse utan att titta.



Vilken påse ger störst chans att få en blå kula, och varför?

Svaret: Påse B, där 1/4 av kulorna är blå.
Kontroll: 20 / 100 = 1/5, 10 / 40 = 1/4 och 2 / 20 = 1/10, och 1/4 är störst.

Idén: *Chansen beror på hur stor del av kulorna i påsen som är blå.*

Lösning A: andelen blå

påse	blå	alla	andel blå
A	20	100	20 %
B	10	40	25 %
C	2	20	10 %

Så räknade vi påse B:
30 + 10 = 40
10 / 40 = 1/4
1/4 = 25/100
alltså 25 %

25 % är störst: påse B. ✓

Eleven räknar i procent hur stor del av alla kulor i varje påse som är blå.

Lösning B: röda på varje blå

Hur många röda på varje blå? ● blå ○ röd

A: 80 / 20 = 4 ●○○○○

B: 30 / 10 = 3 ●○○○

C: 18 / 2 = 9 ●○○○○○○○○○

Färre röda på varje blå ger större chans.
Påse B är bäst. ✓

Eleven räknar hur många röda kulor det finns på varje blå och väljer påsen med färst röda på varje blå.

Lösning C: tankevurpa

A har 20 blå, B 10 och C 2.
20 är flest.
Svar: Påse A, den har flest blå.

Påse A har flest blå men också flest röda, och bara 1/5 av kulorna är blå.

Fråga: ”Vilken påse skulle eleven välja, om påse A hade 1 000 röda?”

Frågor om tankarna bakom

1. Vad räknar eleven ut för varje påse i lösning A?
2. Varför delar eleven i lösning B de röda med de blå?
3. Var syns det i båda lösningarna att påse B är bäst, fast påse A har fler blå?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om talen inte gick att dela jämnt, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Problembanken åk 7–9, problem 11, Kulpåsen.

Lärarens sida: Medel, problem 4, Bollbytet

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

Omar har 26 golfbollar och vill byta bort alla. Han kan byta 3 golfbollar mot 5 tennisbollar, och 2 golfbollar mot 7 pingisbollar.

Hur många tennisbollar och pingisbollar kan Omar få?

Det finns flera svar. Hitta alla.

Problemet har flera svar, och båda bytena ska gå jämnt ut. Omar kan få 0, 10, 20, 30 eller 40 tennisbollar, med 91, 70, 49, 28 eller 7 pingisbollar. Eleverna arbetar systematiskt med multiplikation och division, så att inget svar saknas. Material: klossar eller kuber, 26 per par. Idén kommer ur Hagland, Hedrén och Taflin (2005).

Lösning A

till tennis	kvar	tennis	pingis
0	26	0	91 ✓
3	23	–	–
6	20	10	70 ✓
9	17	–	–
12	14	20	49 ✓
15	11	–	–
18	8	30	28 ✓
21	5	–	–
24	2	40	7 ✓

Så räknade vi raden med 6:
6 / 3 = 2 byten
2 · 5 = 10 tennis
20 / 2 = 10 byten
10 · 7 = 70 pingis

23 kvar är udda, det går inte.

5 sätt ✓

Lösning B

Alla till pingis: 26 / 2 = 13 byten



13 · 7 = 91 pingis

Flytta 6: tre tvåor blir två treor.



2 · 5 = 10 tennis och 10 · 7 = 70 pingis

Varje gång: 21 pingis färre, 10 tennis fler.

tennis:	0	10	20	30	40	
pingis:	91	70	49	28	7	5 sätt ✓

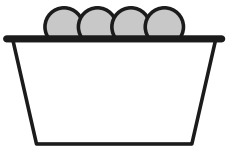
I passet	
Ringa in	Frågorna, talen 26, 3, 5, 2 och 7, och orden byta och alla.
Lyft ut	Vi vet: 3 golfbollar ger 5 tennisbollar, 2 golfbollar ger 7 pingisbollar, Omar byter alla 26. Vi ska ta reda på: hur många av varje, och alla sätt.
Ord och tal	Peka på bilden vid ordet byta. Fråga: Vad räknar 3, och vad räknar 5? Får Omar ta bara pingisbollar? Ja, det är ett av fem sätt.
Förutse	En tabell, bollar som ritas, eller alla till pingis först. Några hittar ett svar och slutar, och andra svarar med antalet byten.
Kör de fast	Föreslå: Välj hur många golfbollar Omar byter mot tennisbollar. Hur många blir kvar till pingis? Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att det inte går med 23 kvar. Försök använda det!
Säg inte	Golfbollarna till tennis ökar med 6 åt gången. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: 10 golfbollar (0 tennis och 35 pingis, eller 10 och 14). Större: Kan Omar få lika många tennisbollar som pingisbollar? (Nej, inget av de fem sätten) Vad kan han få för 50 golfbollar? (9 sätt, från 0 och 175 till 80 och 7)
Jämför	Två treor är sex, och det som blir kvar ska gå att dela med 2. I A syns det i varannan rad, och i B när eleven flyttar 6 golfbollar.
Fel eller osäker	Ni säger 2 tennisbollar och 10 pingisbollar. Hur kan ni kontrollera det mot problemet? *”Är det alla sätt?”* Hur kan ni kontrollera att inget saknas?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

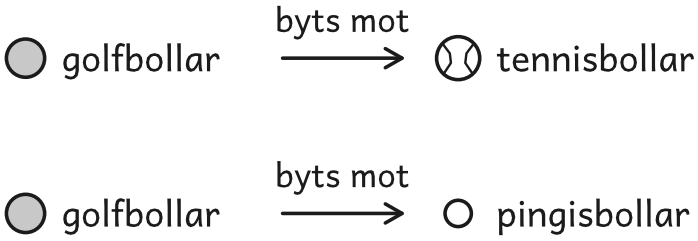
Bollbytet

Omar har 26 golfbollar och vill byta bort alla.

Han kan byta 3 golfbollar mot 5 tennisbollar, och 2 golfbollar mot 7 pingisbollar.



Omars golfbollar



Frågorna

1. Hur många tennisbollar och pingisbollar kan Omar få?
2. Det finns flera svar. Hitta alla.

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Bollbytet

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

till tennis	kvar	tennis	pingis
0	26	0	91 ✓
3	23	–	–
6	20	10	70 ✓
9	17	–	–
12	14	20	49 ✓
15	11	–	–
18	8	30	28 ✓
21	5	–	–
24	2	40	7 ✓

Så räknade vi raden med 6:

6 / 3 = 2 byten
2 · 5 = 10 tennis
20 / 2 = 10 byten
10 · 7 = 70 pingis

23 kvar är udda, det går inte.

5 sätt ✓

Lösning B

Alla till pingis: 26 / 2 = 13 byten



13 · 7 = 91 pingis

Flytta 6: tre tvåor blir två treor.



2 · 5 = 10 tennis och 10 · 7 = 70 pingis

Varje gång: 21 pingis färre, 10 tennis fler.

tennis:	0	10	20	30	40	
pingis:	91	70	49	28	7	5 sätt ✓

Frågor att prata om

1. Hur väljer eleven raderna i lösning A, och varför går bara varannan rad?
2. Varför flyttar eleven i lösning B 6 golfbollar i taget från pingis till tennis?
3. Var syns det i båda lösningarna att golfbollarna till tennis ökar med 6 åt gången?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 100 golfbollar, och varför?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Lösningsförslag · Taluppfattning

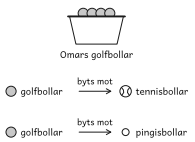
Bollbytet

Problemet

Omar har 26 golfbollar och vill byta bort alla. Han kan byta 3 golfbollar mot 5 tennisbollar, och 2 golfbollar mot 7 pingisbollar.

Hur många tennisbollar och pingisbollar kan Omar få?

Det finns flera svar. Hitta alla.



Svaret: 0, 10, 20, 30 eller 40 tennisbollar, med 91, 70, 49, 28 eller 7 pingisbollar.
Kontroll: Tennis + pingis: 0 + 26, 6 + 20, 12 + 14, 18 + 8, 24 + 2 golfbollar.

Idén: *Golfbollarna till tennis går i treor och resten i tvåor, så sätten skiljer sig med 6 golfbollar.*

Lösning A: pröva tre i taget

till tennis	kvar	tennis	pingis
0	26	0	91 ✓
3	23	–	–
6	20	10	70 ✓
9	17	–	–
12	14	20	49 ✓
15	11	–	–
18	8	30	28 ✓
21	5	–	–
24	2	40	7 ✓

Så räknade vi raden med 6:

6 / 3 = 2 byten
→ 2 · 5 = 10 tennis
20 / 2 = 10 byten
10 · 7 = 70 pingis

23 kvar är udda, det går inte.

5 sätt ✓

Eleven prövar 0, 3, 6 och fler golfbollar till tennis, och resten går att dela med 2 i varannan rad.

Lösning B: alla till pingis först

Alla till pingis: 26 / 2 = 13 byten



13 · 7 = 91 pingis

Flytta 6: tre tvåor blir två treor.



2 · 5 = 10 tennis och 10 · 7 = 70 pingis

Varje gång: 21 pingis färre, 10 tennis fler.

tennis:	0	10	20	30	40	
pingis:	91	70	49	28	7	5 sätt ✓

Eleven byter alla mot pingis och flyttar sedan 6 golfbollar i taget från pingis till tennis.

Lösning C: tankevurpa

6 + 20 = 26 golfbollar

Tennis: 6 / 3 = 2

Pingis: 20 / 2 = 10

Svar: 2 tennis och 10 pingis.

Eleven svarar med antalet byten. Varje byte ger 5 tennisbollar eller 7 pingisbollar: 2 · 5 = 10 och 10 · 7 = 70.

Fråga: ”Hur många tennisbollar ger 6 golfbollar?”

Frågor om tankarna bakom

1. Hur väljer eleven raderna i lösning A, och varför går bara varannan rad?
2. Varför flyttar eleven i lösning B 6 golfbollar i taget från pingis till tennis?
3. Var syns det i båda lösningarna att golfbollarna till tennis ökar med 6 åt gången?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 100 golfbollar, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Hagland, Hedrén och Taflin (2005).

Lärarens sida: Medel, problem 5, Tangrammet

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

Ett tangram är ett pussel med sju bitar: fem trianglar, en kvadrat och ett parallellogram. Tillsammans bildar bitarna en stor kvadrat. Den stora kvadraten har arean 400 cm².

Hur stor area har varje bit?

Vilka bitar har lika stor area?

Area som delar av en helhet. De stora trianglarna är 100 cm² var, den mellanstora, kvadraten och parallellogrammet 50 cm² och de små 25 cm². Eleverna lägger bitarna på varandra och ser att olika former kan ha samma area. Material: ett tangram per par, eller en kopia av bilden och en sax. Idén kommer ur Hagland, Hedrén och Taflin (2005).

Lösning A



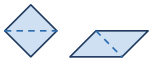
De två stora är halva den stora kvadraten.
En stor: 400 / 4 = 100 cm²



Den mellanstora täcker halva den stora:
100 / 2 = 50 cm²

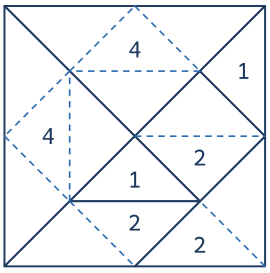


De två små täcker den mellanstora:
50 / 2 = 25 cm²



De täcker också kvadraten och parallellogrammet:
2 · 25 = 50 cm² ✓

Lösning B



4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 16 små trianglar
↓
400 / 16 = 25 cm²

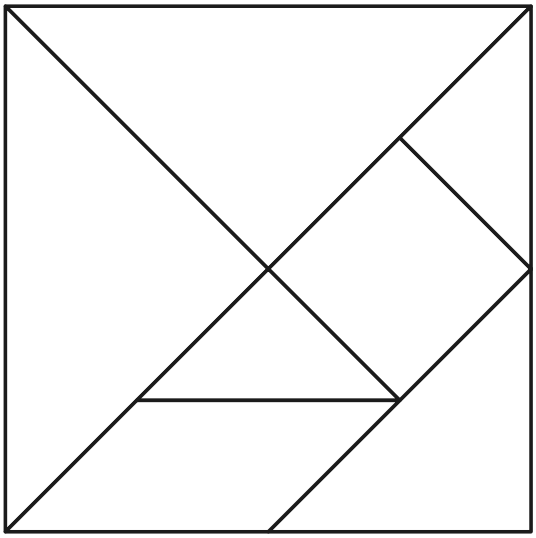
stor: 4 · 25 = 100 cm²
med 2 små: 2 · 25 = 50 cm²
liten: 25 cm² ✓

I passet	
Ringa in	Frågorna, talet 400, och orden area, cm², kvadrat och parallellogram.
Lyft ut	Vi vet: sju bitar, och hela kvadraten har arean 400 cm². Vi ska ta reda på: arean av varje bit, och vilka som är lika stora.
Ord och tal	Visa bilden och peka på bitarna. Fråga: Vad betyder area? Vad räknar 400, hela kvadraten eller en bit?
Förutse	Bitar som läggs på varandra, rutor som ritas, eller halvor och fjärdedelar. Några räknar 400 / 7, som om alla bitar vore lika stora.
Kör de fast	Föreslå: Klipp ut bitarna ur en kopia och lägg dem på varandra. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att två små täcker kvadraten. Försök använda det!
Säg inte	Dela hela kvadraten i 16 små trianglar. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Hela kvadraten är 16 cm² (små 1, stora 4 och de andra 2 cm²). Större: Lägg en figur med arean 300 cm². (Som alla utom en stor triangel) Ett annat tangram har ett parallellogram på 125 cm². Hur stort är hela? (1 000 cm²)
Jämför	Kvadraten, parallellogrammet och den mellanstora triangeln är två små trianglar var. Lyft fram att olika former kan ha samma area, som A visar och B räknar.
Fel eller osäker	Ni säger att kvadraten är större än parallellogrammet. Hur kan ni kontrollera det med bitarna? *”Blir summan 400?”* Hur kan ni kontrollera att alla sju bitar är med?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Tangrammet

Ett tangram är ett pussel med sju bitar: fem trianglar, en kvadrat och ett parallellogram. Tillsammans bildar bitarna en stor kvadrat. Den stora kvadraten har arean 400 cm^2.



Frågorna

1. Hur stor area har varje bit?
2. Vilka bitar har lika stor area?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Tangrammet

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A



De två stora är halva den stora kvadraten.

En stor: 400 / 4 = 100 cm²



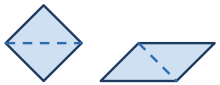
Den mellanstora täcker halva den stora:

100 / 2 = 50 cm²



De två små täcker den mellanstora:

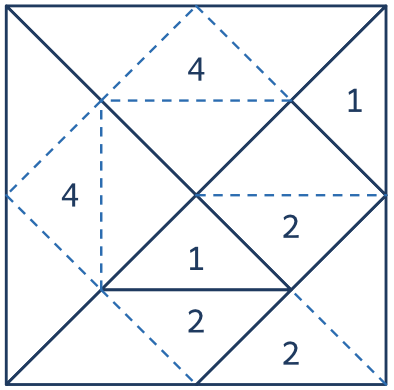
50 / 2 = 25 cm²



De täcker också kvadraten och parallellogrammet:

2 · 25 = 50 cm² ✓

Lösning B



4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 16 små trianglar

↓

400 / 16 = 25 cm²

stor: 4 · 25 = 100 cm²

med 2 små: 2 · 25 = 50 cm²

liten: 25 cm² ✓

Frågor att prata om

1. Vilka bitar lägger eleven på varandra i lösning A?
2. Varför delar eleven i lösning B 400 med 16?
3. Var syns det i båda lösningarna att kvadraten och parallellogrammet har samma area?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om hela tangrammet var 1 000 cm², och varför?

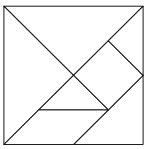
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Lösningsförslag · Geometri

Tangrammet

Problemet

Ett tangram är ett pussel med sju bitar: fem trianglar, en kvadrat och ett parallellogram. Tillsammans bildar bitarna en stor kvadrat. Den stora kvadraten har arean 400 cm².



Hur stor area har varje bit?

Vilka bitar har lika stor area?

Svaret: De stora trianglarna är 100 cm², de små 25 och de tre andra 50 var.
Kontroll: 2 · 100 + 3 · 50 + 2 · 25 = 400 för alla sju bitarna.

Idén: *Kvadraten, parallellogrammet och den mellanstora triangeln är två små trianglar var, så olika former kan ha samma area.*

Lösning A: bitarna på varandra



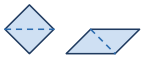
De två stora är halva den stora kvadraten.
En stor: 400 / 4 = 100 cm²



Den mellanstora täcker halva den stora:
100 / 2 = 50 cm²



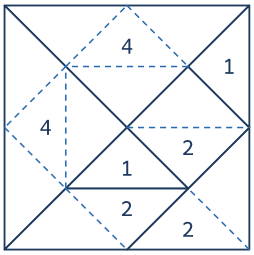
De två små täcker den mellanstora:
50 / 2 = 25 cm²



De täcker också kvadraten och parallellogrammet:
2 · 25 = 50 cm² ✓

Eleven lägger bitarna på varandra och halverar, från en stor triangel på 100 cm² till en liten.

Lösning B: 16 små trianglar



4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 16 små trianglar
↓
400 / 16 = 25 cm²

stor: 4 · 25 = 100 cm²
med 2 små: 2 · 25 = 50 cm²
liten: 25 cm² ✓

Eleven delar hela kvadraten i 16 små trianglar och räknar hur många som ryms i varje bit.

Lösning C: tankevurpa

Tangrammet har 7 bitar.
400 / 7 = 57 rest 1
Svar: Ungefär 57 cm² var.

Eleven delar som om alla sju bitar vore lika stora, men fyra små täcker en stor triangel.
Fråga: ”Hur kan ni pröva 57 cm² med bitarna?”

Frågor om tankarna bakom

1. Vilka bitar lägger eleven på varandra i lösning A?
2. Varför delar eleven i lösning B 400 med 16?
3. Var syns det i båda lösningarna att kvadraten och parallellogrammet har samma area?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om hela tangrammet var 1 000 cm², och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Hagland, Hedrén och Taflin (2005).

Lärarens sida: Medel, problem 6, Skolan

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

På en skola går fler än 300 och färre än 400 elever. Exakt 1/3 av eleverna går i årskurs 7. Exakt 20 % av eleverna åker buss till skolan.

Hur många elever kan det gå på skolan? Ge ett exempel.

Hitta alla möjliga antal, och en regel för dem.

Problemet handlar om bråk, procent och delbarhet. Skolan kan ha 315, 330, 345, 360, 375 eller 390 elever, alltså ett antal som går att dela med 15. Eleverna prövar antal, ser att 20 % är 1/5 och letar efter alla svar. Idén kommer ur Hagland, Hedrén och Taflin (2005).

Lösning A

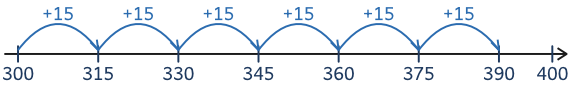
elever	1/3	20 %	går?
320	106 rest 2	64	nej
325	108 rest 1	65	nej
330	110	66	ja
345	115	69	ja
360	120	72	ja

Så räknade vi 345:
345 / 3 = 115
10 % är 34,5
2 · 34,5 = 69

Raderna som går ligger 15 isär:
315, 330, 345, 360, 375 och 390 ✓

Lösning B

1/3: går att dela med 3.
20 % är 1/5: går att dela med 5.
Båda: går att dela med 15.
300 / 15 = 20, men 300 är för få.



390 + 15 = 405 är för många.

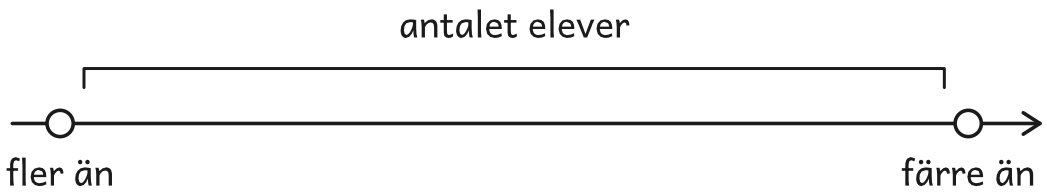
6 svar ✓

I passet	
Ringa in	Frågorna, talen 300, 400, 1/3 och 20 %, och orden exakt, *”fler än”* och *”färre än”*.
Lyft ut	Vi vet: fler än 300 och färre än 400 elever, 1/3 går i årskurs 7, 20 % åker buss. Vi ska ta reda på: alla möjliga antal, och en regel.
Ord och tal	Visa tallinjen. Fråga: Vad betyder exakt, och fler än 300? Kan en elev delas? Vad är 20 % som bråk?
Förutse	Antal som prövas i en tabell, 10 % två gånger, eller delbart med 3 och 5. Några slutar vid första svaret.
Kör de fast	Föreslå: Välj ett antal och räkna ut 1/3 och 20 % av det. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att 330 och 345 går. Försök använda det!
Säg inte	Antalet ska gå att dela med 15. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Fler än 20 och färre än 70 elever (30, 45 eller 60). Större: Vilka antal är möjliga om 1/4 går i årskurs 7 och 1/6 åker buss? (De som går att dela med 12: 312, 324 och så vidare till 396)
Jämför	1/3 och 20 % går jämnt ut när antalet går att dela med 3 och med 5. I A syns det som 15 mellan svaren, och i B som 15-hopp.
Fel eller osäker	Ni säger att 350 går. Hur kan ni kontrollera det mot problemet? Ni har ett svar. Hur kan ni kontrollera om det finns fler?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Skolan

På en skola går fler än 300 och färre än 400 elever. Exakt 1/3 av eleverna går i årskurs 7. Exakt 20 % av eleverna åker buss till skolan.



Frågorna

1. Hur många elever kan det gå på skolan? Ge ett exempel.
2. Hitta alla möjliga antal, och en regel för dem.

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Skolan

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

elever	1/3	20 %	går?
320	106 rest 2	64	nej
325	108 rest 1	65	nej
330	110	66	ja
345	115	69	ja
360	120	72	ja

Så räknade vi 345:

345 / 3 = 115

10 % är 34,5

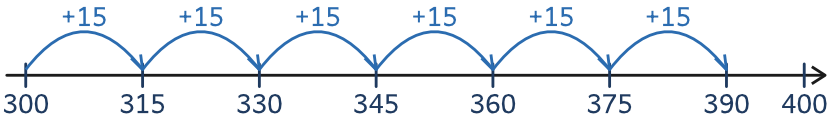
2 · 34,5 = 69

Raderna som går ligger 15 isär:

315, 330, 345, 360, 375 och 390 ✓

Lösning B

1/3: går att dela med 3.
20 % är 1/5: går att dela med 5.
Båda: går att dela med 15.
300 / 15 = 20, men 300 är för få.



390 + 15 = 405 är för många.

6 svar ✓

Frågor att prata om

1. Vad prövar eleven för varje antal i lösning A?
2. Varför hoppar eleven 15 i taget i lösning B?
3. Var syns det i båda lösningarna att svaren ligger 15 isär?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om skolan hade mellan 300 och 3 000 elever, och varför?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Lösningsförslag · Taluppfattning

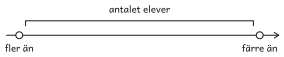
Skolan

Problemet

På en skola går fler än 300 och färre än 400 elever. Exakt 1/3 av eleverna går i årskurs 7. Exakt 20 % av eleverna åker buss till skolan.

Hur många elever kan det gå på skolan? Ge ett exempel.

Hitta alla möjliga antal, och en regel för dem.



Svaret: 315, 330, 345, 360, 375 eller 390 elever, som alla går att dela med 15.
Kontroll: 1/3 av 315 = 105, 20 % av 315 = 63, och 300 och 405 är utanför.

Idén: *1/3 och 20 % går jämnt ut när antalet går att dela med 3 och med 5.*

Lösning A: pröva 1/3 och 20 %

elever	1/3	20 %	går?
320	106 rest 2	64	nej
325	108 rest 1	65	nej
330	110	66	ja
345	115	69	ja
360	120	72	ja

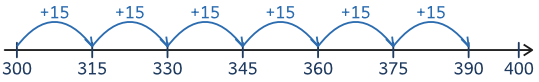
Så räknade vi 345:
345 / 3 = 115
10 % är 34,5
2 · 34,5 = 69

Raderna som går ligger 15 isär:
315, 330, 345, 360, 375 och 390 ✓

Eleven prövar antal i en tabell och ser att de som går ligger 15 isär.

Lösning B: resonemang och tallinje

1/3: går att dela med 3.
20 % är 1/5: går att dela med 5.
Båda: går att dela med 15.
300 / 15 = 20, men 300 är för få.



390 + 15 = 405 är för många.

6 svar ✓

Eleven ser att antalet ska gå att dela med 3 och 5, alltså med 15, och hoppar 15 i taget.

Lösning C: tankevurpa

Mitt emellan 300 och 400: 350
20 % av 350 = 70
Svar: 350 elever.

20 % stämmer, men 1/3 av 350 går inte jämnt ut:
350 / 3 = 116 rest 2.
Fråga: ”Hur kan ni pröva 350 mot hela problemet?”

Frågor om tankarna bakom

1. Vad prövar eleven för varje antal i lösning A?
2. Varför hoppar eleven 15 i taget i lösning B?
3. Var syns det i båda lösningarna att svaren ligger 15 isär?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om skolan hade mellan 300 och 3 000 elever, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Hagland, Hedrén och Taflin (2005).

Lärarens sida: Medel, problem 7, Samlarbilderna

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

Fem elever samlar på bilder. Den som har flest har 40 bilder. Medelvärdet är 22 bilder. Medianen är 20 och typvärdet är 20.

Hur många bilder kan var och en av de fem ha?

Det finns flera svar. Hitta så många ni kan.

Problemet handlar om medelvärde, median och typvärde och har flera svar. Ett svar är 10, 20, 20, 20 och 40, och det finns 14 svar om alla har minst en bild. Eleverna använder att summan är 5 · 22 = 110 och ordnar talen. Idén kommer ur Hagland, Hedrén och Taflin (2005).

Lösning A

Pröva fem tal i storleksordning:

10	15	20	25	40	Summan är 110, men inget tal står två gånger.
10	20	20	20	40	10 + 20 + 20 + 20 + 40 = 110 110 / 5 = 22 ✓
14	16	20	20	40	14 + 16 + 20 + 20 + 40 = 110 110 / 5 = 22 ✓

Medianen och typvärdet är 20 i båda.

Lösning B

Summan: 5 · 22 = 110

		20		40	Kvar till tre rutor: 110 − 20 − 40 = 50

Typvärdet 20: ett 20 till.

		20	20	40	50 − 20 = 30 till två: 10 och 20, 14 och 16
	20	20		40	50 − 20 = 30 till två: 5 och 25, 6 och 24 …

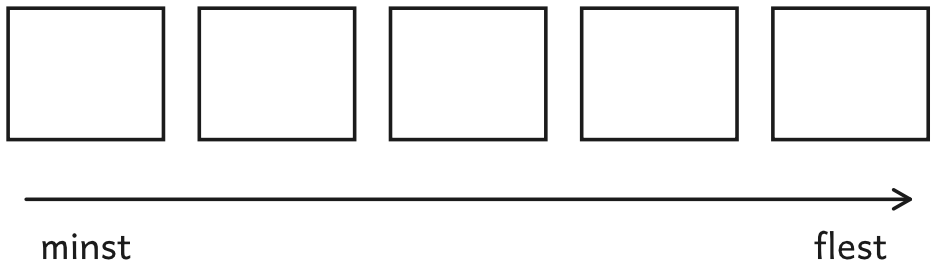
Kontroll: 5 + 20 + 20 + 25 + 40 = 110 ✓

I passet	
Ringa in	Frågorna, talen 40, 22 och 20, och orden flest, medelvärde, median och typvärde.
Lyft ut	Vi vet: fem elever, den som har flest har 40, medelvärdet 22, medianen 20, typvärdet 20. Vi ska ta reda på: hur många bilder var och en kan ha.
Ord och tal	Visa rutorna på bilden. Fråga: Vad betyder median och typvärde? Vad räknar 22? Måste någon av eleverna ha 22 bilder?
Förutse	Tal som prövas i rutorna, summan 110, eller 20 i mitten först. Några skriver inte talen i ordning.
Kör de fast	Föreslå: Skriv fem tal i rutorna och räkna medelvärdet. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att summan måste bli 110. Försök använda det!
Säg inte	Sätt 20 i mitten och 40 sist, och summan är 110. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Den som har flest har 8, medelvärdet är 5, och medianen och typvärdet är 4 (3 svar). Större: Hitta alla svar, om alla fem har minst en bild och bara 20 är typvärde. Hur vet ni att ni har alla? (14 svar, efter var det andra 20 står)
Jämför	Summan är 5 · 22 = 110, och 20 står minst två gånger. A prövar och räknar summan, och B börjar med de tal som måste stå.
Fel eller osäker	Ni säger att 15, 15, 20, 20 och 40 går. Hur kan ni kontrollera typvärdet mot problemet? *”Är medianen 20?”* Hur kan ni kontrollera det?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Samlarbilderna

Fem elever samlar på bilder. Den som har flest har 40 bilder. Medelvärdet är 22 bilder. Medianen är 20 och typvärdet är 20.



Frågorna

1. Hur många bilder kan var och en av de fem ha?
2. Det finns flera svar. Hitta så många ni kan.

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Samlarbilderna

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

Pröva fem tal i storleksordning:

10	15	20	25	40

Summan är 110, men inget tal står två gånger.

10	20	20	20	40

10 + 20 + 20 + 20 + 40 = 110
110 / 5 = 22 ✓

14	16	20	20	40

14 + 16 + 20 + 20 + 40 = 110
110 / 5 = 22 ✓

Medianen och typvärdet är 20 i båda.

Lösning B

Summan: 5 · 22 = 110

		20		40

Kvar till tre rutor:
110 − 20 − 40 = 50

Typvärdet 20: ett 20 till.

		20	20	40

50 − 20 = 30 till två:
10 och 20,
14 och 16

	20	20		40

50 − 20 = 30 till två:
5 och 25, 6 och 24 …

Kontroll: 5 + 20 + 20 + 25 + 40 = 110 ✓

Frågor att prata om

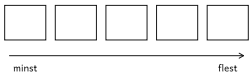
1. Vad prövar eleven för varje rad i lösning A?
2. Varför räknar eleven i lösning B 110 − 20 − 40?
3. Var syns det i båda lösningarna att summan måste vara 110?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja för att hitta alla svar, och varför?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Samlarbilderna

Problemet

Fem elever samlar på bilder. Den som har flest har 40 bilder. Medelvärdet är 22 bilder. Medianen är 20 och typvärdet är 20.



Hur många bilder kan var och en av de fem ha?

Det finns flera svar. Hitta så många ni kan.

Svaret: Har alla minst en bild, finns det 14 svar, som 10, 20, 20, 20, 40.
Kontroll: 10 + 20 + 20 + 20 + 40 = 110 = 5 · 22, medianen 20 och typvärdet 20.

Idén: *Summan är 5 · 22 = 110, och 20 står minst två gånger.*

Lösning A: pröva och förbättra

Pröva fem tal i storleksordning:

10	15	20	25	40	Summan är 110, men inget tal står två gånger.
10	20	20	20	40	10 + 20 + 20 + 20 + 40 = 110 110 / 5 = 22 ✓
14	16	20	20	40	14 + 16 + 20 + 20 + 40 = 110 110 / 5 = 22 ✓

Medianen och typvärdet är 20 i båda.

Eleven prövar fem tal i storleksordning med summan 110 och ändrar dem tills typvärdet är 20.

Lösning B: det som måste stå

Summan: 5 · 22 = 110

		20		40	Kvar till tre rutor: 110 − 20 − 40 = 50

Typvärdet 20: ett 20 till.

		20	20	40	50 − 20 = 30 till två: 10 och 20, 14 och 16
	20	20		40	50 − 20 = 30 till två: 5 och 25, 6 och 24 ...

Kontroll: 5 + 20 + 20 + 25 + 40 = 110 ✓

Eleven sätter 20 i mitten och 40 sist. De tre andra blir 50, och ett av dem måste vara 20.

Lösning C: tankevurpa

15 + 15 + 20 + 20 + 40 = 110

110 / 5 = 22

Svar: 15, 15, 20, 20 och 40.

Summan, medianen och 40 stämmer, men 15 och 20 står två gånger var, så typvärdet är inte bara 20.
Fråga: ”Vilket villkor har eleven inte prövat?”

Frågor om tankarna bakom

1. Vad prövar eleven för varje rad i lösning A?
2. Varför räknar eleven i lösning B 110 − 20 − 40?
3. Var syns det i båda lösningarna att summan måste vara 110?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja för att hitta alla svar, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Hagland, Hedrén och Taflin (2005).

Lärarens sida: Medel, problem 8, Klädaffären

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

I en affär med begagnade kläder kostar 2 hattar lika mycket som 5 kjolar. Där kostar 3 kjolar lika mycket som 8 tröjor, och 2 tröjor kostar lika mycket som 3 kepsar.

Fyra vänner handlar. Ali köper 3 hattar, Bea 7 kjolar, Cleo 18 tröjor och Dan 29 kepsar.

Vem betalar mest?

Ordna de fyra köpen från dyrast till billigast.

Problemet handlar om likheter i en kedja. Ali betalar mest och Cleo minst, och ordningen är Ali, Dan, Bea och Cleo. Eleverna räknar med proportioner i flera steg och väljer en enhet som de räknar om allt till, kepsar eller kronor. Idén kommer ur Känguru 2023, Benjamin nr 24.

Lösning A

2 tröjor kostar som 3 kepsar
8 tröjor: 4 · 3 = 12 kepsar
3 kjolar kostar som 12 kepsar
en kjol: 12 / 3 = 4 kepsar
5 kjolar: 5 · 4 = 20 kepsar
en hatt: 20 / 2 = 10 kepsar

vem	köp	i kepsar
Ali	3 hattar	3 · 10 = 30
Bea	7 kjolar	7 · 4 = 28
Cleo	18 tröjor	9 · 3 = 27
Dan	29 kepsar	29

Från dyrast: Ali 30, Dan 29, Bea 28 och Cleo 27.
Ali betalar mest. ✓

Lösning B

Välj: en keps kostar 10 kr.
en tröja: 3 · 10 / 2 = 15 kr
en kjol: 8 · 15 / 3 = 40 kr
en hatt: 5 · 40 / 2 = 100 kr

vem	köp	kronor
Ali	3 hattar	3 · 100 = 300
Bea	7 kjolar	7 · 40 = 280
Cleo	18 tröjor	18 · 15 = 270
Dan	29 kepsar	29 · 10 = 290

Från dyrast: Ali 300, Dan 290, Bea 280 och Cleo 270.
Ali betalar mest. ✓

I passet	
Ringa in	Frågorna, talen i de tre likheterna, och orden *”kostar lika mycket som”*.
Lyft ut	Vi vet: tre likheter mellan priser, och vad var och en köper. Vi ska ta reda på: vem som betalar mest, och ordningen.
Ord och tal	Visa hatten, kjolen, tröjan och kepsen på bilden. Fråga: Vilken är dyrare, en kjol eller en tröja? Hur vet ni det?
Förutse	Allt i kepsar, ett pris som väljs, eller sakerna som ritas. Några tror att en kjol kostar som 8 tröjor.
Kör de fast	Föreslå: Leta efter en sak som ni kan räkna om allt till. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att en tröja kostar mer än en keps. Försök använda det!
Säg inte	Räkna om allt till kepsar, eller säg att en keps kostar 10 kr. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: En hatt kostar som 2 kjolar, och en kjol som 3 tröjor. Ordna 2 hattar, 3 kjolar och 10 tröjor (hattarna, tröjorna, kjolarna). Större: Hitta på ett köp som kostar lika mycket som Beas. (Som 28 kepsar, eller 2 hattar och 2 kjolar)
Jämför	Vi räknar om allt till samma enhet. En hatt är 10 kepsar i A och 100 kr i B, alltså 10 kepsar i båda. Lyft fram att enheten går att välja.
Fel eller osäker	Ni säger att en kjol kostar som 8 tröjor. Hur kan ni kontrollera det mot problemet? *”Är ordningen rätt?”* Hur kan ni kontrollera den på ett annat sätt?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Klädaffären

I en affär med begagnade kläder kostar 2 hattar lika mycket som 5 kjolar. Där kostar 3 kjolar lika mycket som 8 tröjor, och 2 tröjor kostar lika mycket som 3 kepsar.

Fyra vänner handlar. Ali köper 3 hattar, Bea 7 kjolar, Cleo 18 tröjor och Dan 29 kepsar.



hatt



kjol



tröja



keps

Frågorna

1. Vem betalar mest?
2. Ordna de fyra köpen från dyrast till billigast.

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Klädaffären

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

2 tröjor kostar som 3 kepsar

8 tröjor: 4 · 3 = 12 kepsar

3 kjolar kostar som 12 kepsar

en kjol: 12 / 3 = 4 kepsar

5 kjolar: 5 · 4 = 20 kepsar

en hatt: 20 / 2 = 10 kepsar

vem	köp	i kepsar
Ali	3 hattar	3 · 10 = 30
Bea	7 kjolar	7 · 4 = 28
Cleo	18 tröjor	9 · 3 = 27
Dan	29 kepsar	29

Från dyrast: Ali 30, Dan 29, Bea 28 och Cleo 27.

Ali betalar mest. ✓

Lösning B

Välj: en keps kostar 10 kr.

en tröja: 3 · 10 / 2 = 15 kr

en kjol: 8 · 15 / 3 = 40 kr

en hatt: 5 · 40 / 2 = 100 kr

vem	köp	kronor
Ali	3 hattar	3 · 100 = 300
Bea	7 kjolar	7 · 40 = 280
Cleo	18 tröjor	18 · 15 = 270
Dan	29 kepsar	29 · 10 = 290

Från dyrast: Ali 300, Dan 290, Bea 280 och Cleo 270.

Ali betalar mest. ✓

Frågor att prata om

1. Hur räknar eleven i lösning A ut vad en kjol är i kepsar?
2. Varför får eleven i lösning B välja att en keps kostar 10 kr?
3. Var syns det i båda lösningarna att en hatt kostar som tio kepsar?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om en sak till kom med, och varför?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

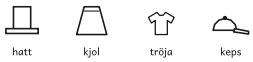
Lösningsförslag · Samband och förändring

Klädaffären

Problemet

I en affär med begagnade kläder kostar 2 hattar lika mycket som 5 kjolar. Där kostar 3 kjolar lika mycket som 8 tröjor, och 2 tröjor kostar lika mycket som 3 kepsar.

Fyra vänner handlar. Ali köper 3 hattar, Bea 7 kjolar, Cleo 18 tröjor och Dan 29 kepsar.



Vem betalar mest?

Ordna de fyra köpen från dyrast till billigast.

Svaret: Ali betalar mest. Från dyrast: Ali, Dan, Bea och Cleo.
Kontroll: Ali 3 · 10 = 30, Dan 29, Bea 7 · 4 = 28, Cleo 18 · 1,5 = 27 kepsar.

Idén: *Alla priser går att räkna om till samma enhet, och enheten går att välja.*

Lösning A: allt i kepsar

2 tröjor kostar som 3 kepsar
8 tröjor: 4 · 3 = 12 kepsar
3 kjolar kostar som 12 kepsar
en kjol: 12 / 3 = 4 kepsar
5 kjolar: 5 · 4 = 20 kepsar
en hatt: 20 / 2 = 10 kepsar

vem	köp	i kepsar
Ali	3 hattar	3 · 10 = 30
Bea	7 kjolar	7 · 4 = 28
Cleo	18 tröjor	9 · 3 = 27
Dan	29 kepsar	29

Från dyrast: Ali 30, Dan 29, Bea 28 och Cleo 27.
Ali betalar mest. ✓

Eleven går igenom likheterna steg för steg och räknar om tröjor, kjolar och hattar till kepsar.

Lösning B: ett påhittat pris

Välj: en keps kostar 10 kr.
en tröja: 3 · 10 / 2 = 15 kr
en kjol: 8 · 15 / 3 = 40 kr
en hatt: 5 · 40 / 2 = 100 kr

vem	köp	kronor
Ali	3 hattar	3 · 100 = 300
Bea	7 kjolar	7 · 40 = 280
Cleo	18 tröjor	18 · 15 = 270
Dan	29 kepsar	29 · 10 = 290

Från dyrast: Ali 300, Dan 290, Bea 280 och Cleo 270.
Ali betalar mest. ✓

Eleven bestämmer att en keps kostar 10 kr och räknar ut priset på de andra sakerna.

Lösning C: tankevurpa

1 kjol = 8 tröjor = 12 kepsar
1 hatt = 5 · 12 / 2 = 30 kepsar
Ali 90, Bea 84, Dan 29, Cleo 27
Svar: Ali, Bea, Dan och Cleo.

Eleven läser 3 kjolar som en kjol. En kjol kostar som 4 kepsar, och en hatt som 10.

Fråga: ”Vad kostar 3 kjolar i kepsar med elevens priser?”

Frågor om tankarna bakom

1. Hur räknar eleven i lösning A ut vad en kjol är i kepsar?
2. Varför får eleven i lösning B välja att en keps kostar 10 kr?
3. Var syns det i båda lösningarna att en hatt kostar som tio kepsar?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om en sak till kom med, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Lärarens sida: Medel, problem 9, Pantpengarna

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

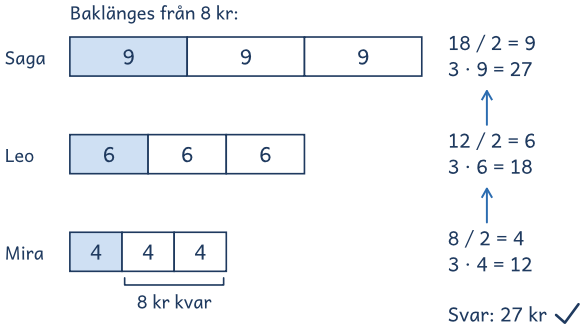
Tre syskon pantar burkar och lägger pengarna i en ask. Saga tar 1/3 av pengarna och går. Sedan kommer Leo. Han tror att ingen har tagit något och tar 1/3 av det som finns kvar. Sist kommer Mira och gör likadant. Då ligger 8 kr kvar i asken.

Hur mycket pengar fick syskonen för burkarna?

Hur mycket tog var och en?

Problemet handlar om bråk av det som finns kvar och om att räkna baklänges. Från början fanns 27 kr, och Saga tog 9 kr, Leo 6 kr och Mira 4 kr. Eleverna ser att 8 kr är 2/3 av det Mira hittade i asken och går bakåt ett steg i taget. Idén kommer ur Hagland, Hedrén och Taflin (2005).

Lösning A



Lösning B

början	Saga	Leo	Mira	kvar
30	10	nej		
81	27	18	12	24
27	9	6	4	8 ✓

Så räknade vi 27:
27 / 3 = 9
27 − 9 = 18
18 / 3 = 6
18 − 6 = 12
12 / 3 = 4
12 − 4 = 8

81 gav 24 kvar.
24 är tre gånger så mycket som 8:
pröva en tredjedel, 81 / 3 = 27.

Svar: 27 kr ✓

I passet	
Ringa in	Frågorna, talen 1/3 och 8 kr, och orden *”det som finns kvar”* och *”likadant”*.
Lyft ut	Vi vet: alla tar 1/3 av det som är kvar, och sist är 8 kr kvar. Vi ska ta reda på: pengarna från början, och vad var och en tog.
Ord och tal	Visa stapeln på bilden. Fråga: Vad betyder *”det som finns kvar”*? Är 8 kr Miras del eller det som blev kvar?
Förutse	Staplar som delas, tal som prövas i en tabell, eller baklänges från 8 kr. Några tror att 8 kr är 1/3 i stället för 2/3.
Kör de fast	Föreslå: Gissa hur mycket som fanns från början, och räkna vad var och en tar. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att Mira lämnar 2/3 kvar. Försök använda det!
Säg inte	8 kr är 2/3 av det Mira hittade, så gå baklänges. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Två syskon gör likadant, och sist är 4 kr kvar (9 kr: Saga tog 3 kr och Leo 2 kr). Större: Fyra syskon gör likadant, och sist är 16 kr kvar. Hur mycket fanns från början? (81 kr)
Jämför	Varje gång blir 2/3 kvar. I A är 8 kr två tredjedelar, så en tredjedel är 4 kr. I B är det 18, 12 och 8 kr som blir kvar.
Fel eller osäker	Ni säger att Mira tog 8 kr. Hur kan ni kontrollera det mot problemet? *”Är det 27 kr?”* Hur kan ni kontrollera att det blir 8 kr kvar?

Pantpengarna

Tre syskon pantar burkar och lägger pengarna i en ask. Saga tar 1/3 av pengarna och går. Sedan kommer Leo. Han tror att ingen har tagit något och tar 1/3 av det som finns kvar. Sist kommer Mira och gör likadant. Då ligger 8 kr kvar i asken.

pengarna i asken

Saga tar 1/3		

Frågorna

1. Hur mycket pengar fick syskonen för burkarna?
2. Hur mycket tog var och en?

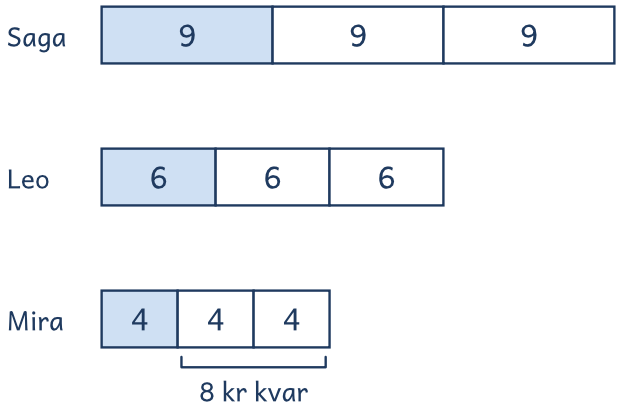
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Pantpengarna

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

Baklänges från 8 kr:



18 / 2 = 9
3 · 9 = 27

12 / 2 = 6
3 · 6 = 18

8 / 2 = 4
3 · 4 = 12

Svar: 27 kr ✓

Lösning B

början	Saga	Leo	Mira	kvar
30	10	nej		
81	27	18	12	24
27	9	6	4	8 ✓

Så räknade vi 27:
27 / 3 = 9
27 − 9 = 18
18 / 3 = 6
18 − 6 = 12
12 / 3 = 4
12 − 4 = 8

81 gav 24 kvar.
24 är tre gånger så mycket som 8:
pröva en tredjedel, 81 / 3 = 27.

Svar: 27 kr ✓

Frågor att prata om

1. Varför börjar eleven i lösning A med den nedersta stapeln?
2. Varför prövar eleven 27 efter 81 i lösning B?
3. Var syns det i båda lösningarna att 2/3 blir kvar varje gång?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med fem syskon, och varför?

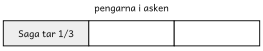
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Lösningsförslag · Taluppfattning

Pantpengarna

Problemet

Tre syskon pantar burkar och lägger pengarna i en ask. Saga tar 1/3 av pengarna och går. Sedan kommer Leo. Han tror att ingen har tagit något och tar 1/3 av det som finns kvar. Sist kommer Mira och gör likadant. Då ligger 8 kr kvar i asken.



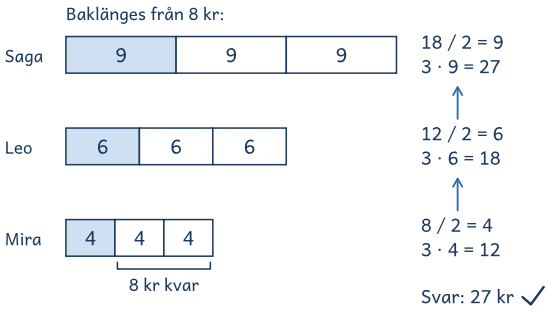
Hur mycket pengar fick syskonen för burkarna?

Hur mycket tog var och en?

Svaret: 27 kr. Saga tog 9 kr, Leo 6 kr och Mira 4 kr.
Kontroll: 27 − 9 = 18, 18 − 6 = 12, 12 − 4 = 8, och var och en tar 1/3.

Idén: *Varje gång blir 2/3 kvar, och 8 kr är 2/3 av det som Mira hittade.*

Lösning A: baklänges med staplar



Eleven ser att de 8 kr som blir kvar är två tredjedelar och går bakåt stapel för stapel.

Lösning B: pröva och förbättra

början	Saga	Leo	Mira	kvar
30	10	nej		
81	27	18	12	24
27	9	6	4	8 ✓

Så räknade vi 27:
27 / 3 = 9
27 − 9 = 18
18 / 3 = 6
18 − 6 = 12
12 / 3 = 4
12 − 4 = 8

81 gav 24 kvar.
24 är tre gånger så mycket som 8:
pröva en tredjedel, 81 / 3 = 27.

Svar: 27 kr ✓

Eleven prövar belopp i en tabell. 81 ger 24 kr kvar, tre gånger 8, så eleven prövar 81 / 3 = 27.

Lösning C: tankevurpa

Mira tog 8 kr: 3 · 8 = 24
Leo: 24 / 2 · 3 = 36
Saga: 36 / 2 · 3 = 54
Svar: 54 kr från början.

Eleven läser 8 kr som Miras del, men 8 kr blev kvar i asken. Med 54 kr blir 16 kr kvar.
Fråga: ”Vad är 8 kr i problemet?”

Frågor om tankarna bakom

1. Varför börjar eleven i lösning A med den nedersta stapeln?
2. Varför prövar eleven 27 efter 81 i lösning B?
3. Var syns det i båda lösningarna att 2/3 blir kvar varje gång?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med fem syskon, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Hagland, Hedrén och Taflin (2005).

Lärarens sida: Medel, problem 10, Smörgåsarna

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

Elsa, Jonas och Kim är på utflykt. Elsa har med sig 2 smörgåsar och Jonas har 3. Smörgåsarna är lika stora. Kim har glömt sin matsäck. De delar de fem smörgåsarna så att alla tre äter lika mycket. Sedan ger Kim 25 kr till Elsa och Jonas för det han har ätit.

Hur ska Elsa och Jonas dela de 25 kronorna, så att det blir rättvist?

Problemet handlar om bråk och rättvis delning. Smörgåsarna är lika stora, och Kim betalar för det han får av var och en. Elsa ska få 5 kr och Jonas 20 kr, eftersom Elsa ger Kim 1/3 smörgås och Jonas 4/3. Material: fem pappersrektanglar per par att vika i tredjedelar. Idén kommer ur Nyman, Säfström och Taflin i Nämnaren 2016:3.

Lösning A



Elsa: 6 tredjedelar Jonas: 9 tredjedelar

Alla äter 5 av 15 tredjedelar.
Kim får 1 av Elsas och 4 av Jonas.
Kim betalar 25 kr för 5 tredjedelar:
25 / 5 = 5 kr för en tredjedel

Elsa: 1 · 5 = 5 kr Jonas: 4 · 5 = 20 kr ✓

Lösning B

5 smörgåsar delas på 3:
5 / 3 = 5/3 var
Elsa ger: 2 − 5/3 = 1/3
Jonas ger: 3 − 5/3 = 4/3
Kim får 1/3 + 4/3 = 5/3 för 25 kr.
1/3 kostar 25 / 5 = 5 kr.

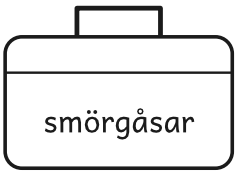
Elsa: 5 kr Jonas: 4 · 5 = 20 kr ✓

I passet	
Ringa in	Frågan, talen 2, 3 och 25, och orden *”lika mycket”* och *”rättvist”*.
Lyft ut	Vi vet: Elsas 2 och Jonas 3 smörgåsar är lika stora, alla äter lika mycket, och Kim betalar 25 kr. Vi ska ta reda på: hur mycket Elsa och Jonas ska få.
Ord och tal	Fråga: Vad betyder rättvist här? Betalar Kim för smörgåsarna Elsa och Jonas hade med sig, eller för det han äter?
Förutse	Smörgåsar som ritas i tredjedelar, bråk, eller pengarna efter antalet smörgåsar. Några svarar då 10 och 15 kr.
Kör de fast	Föreslå: Rita smörgåsarna och dela dem så att alla får lika. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att alla äter 5 tredjedelar. Försök använda det!
Säg inte	Elsa ger Kim 1/3 och Jonas ger 4/3. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Elsa har 1 smörgås och Jonas 2, och Kim betalar 10 kr (Elsa 0 kr och Jonas 10 kr). Större: Elsa har 3 smörgåsar och Jonas 5, och Kim betalar 40 kr. Hur ska de dela nu? (Elsa 5 kr och Jonas 35 kr)
Jämför	Kim betalar för det han får av var och en. I A syns det i bitarna med K, och i B i 2 − 5/3 och 3 − 5/3.
Fel eller osäker	Ni säger att Elsa ska ha 10 kr. Hur kan ni kontrollera det mot det hon gav Kim? *”Är 5 och 20 kr rättvist?”* Hur kan ni kontrollera det?

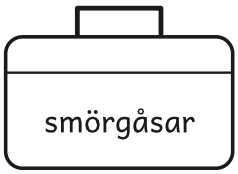
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Smörgåsarna

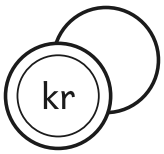
Elsa, Jonas och Kim är på utflykt. Elsa har med sig 2 smörgåsar och Jonas har 3. Smörgåsarna är lika stora. Kim har glömt sin matsäck. De delar de fem smörgåsarna så att alla tre äter lika mycket. Sedan ger Kim 25 kr till Elsa och Jonas för det han har ätit.



Elsa



Jonas



Kim

Frågan

Hur ska Elsa och Jonas dela de 25 kronorna, så att det blir rättvist?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Smörgåsarna

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A



Elsa: 6 tredjedelar

Jonas: 9 tredjedelar

Alla äter 5 av 15 tredjedelar.

Kim får 1 av Elsas och 4 av Jonas.

Kim betalar 25 kr för 5 tredjedelar:

25 / 5 = 5 kr för en tredjedel

Elsa: 1 · 5 = 5 kr

Jonas: 4 · 5 = 20 kr ✓

Lösning B

5 smörgåsar delas på 3:

5 / 3 = 5/3 var

Elsa ger: 2 − 5/3 = 1/3

Jonas ger: 3 − 5/3 = 4/3

Kim får 1/3 + 4/3 = 5/3 för 25 kr.

1/3 kostar 25 / 5 = 5 kr.

Elsa: 5 kr

Jonas: 4 · 5 = 20 kr ✓

Frågor att prata om

1. Hur visar eleven i lösning A vad Kim äter av Elsas och Jonas smörgåsar?
2. Varför räknar eleven i lösning B 2 − 5/3?
3. Var syns det i båda lösningarna att Jonas ger fyra gånger så mycket som Elsa?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med fyra personer, och varför?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

LÖSNINGSFÖRSLAG · TALUPPFATTNING

SMÖRGÅSARNA

PROBLEMET

Elsa, Jonas och Kim är på utflykt. Elsa har med sig 2 smörgåsar och Jonas har 3. Smörgåsarna är lika stora. Kim har glömt sin matsäck. De delar de fem smörgåsarna så att alla tre äter lika mycket. Sedan ger Kim 25 kr till Elsa och Jonas för det han har ätit.



Hur ska Elsa och Jonas dela de 25 kronorna, så att det blir rättvist?

Svaret: Elsa ska få 5 kr och Jonas 20 kr.
Kontroll: Elsa ger $2 - 5/3 = 1/3$ och Jonas $3 - 5/3 = 4/3$, och $5 + 4 \cdot 5 = 25$.

IDÉN: *Kim betalar för det han får av var och en: 1/3 smörgås av Elsa och 4/3 av Jonas.*

LÖSNING A: SMÖRGÅSARNA I TREDJEDELAR



Alla äter 5 av 15 tredjedelar.
Kim får 1 av Elsas och 4 av Jonas.
Kim betalar 25 kr för 5 tredjedelar:
25 / 5 = 5 kr för en tredjedel

Elsa: $1 \cdot 5 = 5$ kr Jonas: $4 \cdot 5 = 20$ kr ✓

Eleven delar smörgåsarna i tredjedelar och räknar hur många tredjedelar Kim får av Elsa och av Jonas.

LÖSNING B: RÄKNA MED BRÅK

5 smörgåsar delas på 3:
5 / 3 = 5/3 var
Elsa ger: $2 - 5/3 = 1/3$
Jonas ger: $3 - 5/3 = 4/3$
Kim får $1/3 + 4/3 = 5/3$ för 25 kr.
1/3 kostar 25 / 5 = 5 kr.

Elsa: 5 kr Jonas: $4 \cdot 5 = 20$ kr ✓

Eleven räknar ut att var och en äter 5/3 smörgås och drar det från Elsas 2 och Jonas 3.

LÖSNING C: TANKEVURPA

25 / 5 = 5 kr per smörgås
Elsa: $2 \cdot 5 = 10$ kr
Jonas: $3 \cdot 5 = 15$ kr
Svar: Elsa 10 kr, Jonas 15 kr.

Kim betalar för det han äter. Elsa åt själv 5/3 och gav Kim bara 1/3 smörgås.
Fråga: ”Vad betalar Kim för, och vem gav honom mest?”

FRÅGOR OM TANKARNA BAKOM

1. Hur visar eleven i lösning A vad Kim äter av Elsas och Jonas smörgåsar?
2. Varför räknar eleven i lösning B $2 - 5/3$?
3. Var syns det i båda lösningarna att Jonas ger fyra gånger så mycket som Elsa?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med fyra personer, och varför?

VISA OCH JÄMFÖR LÖSNINGAR

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Nyman, Säfström och Taflin i Nämnaren 2016:3.

Lärarens sidor: Avancerat

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Här står problemen på nivån Avancerat, som ligger nära åk 8–9, i den ordning gruppen tar dem. Varje problem har lärarens sida, problemets sida, bladet Två lösningar och ett lösningsförslag.

Problemet	Matematiken	Lösning A	Lösning B
1. Cykelförrådet	tabell och ekvation	Pröva och förbättra i en tabell	Skriv en ekvation med x trehjulingar
2. Glasstapeln	ett linjärt samband	Gör en tabell: 4 cm per glas	Skriv ett uttryck: 10 + 4n
3. Stenplattorna	mönster med n · n och 4n + 4	Gör en tabell: rita och räkna figurerna	se strukturen: n^2 och 4n + 4
4. Udda eller jämnt	sannolikhet och kombinatorik	Gör en lista: alla tio par	räkna paren efter udda och jämnt
5. Svamparna	procent av en del	börja med 100 g svampar	Rita eller bygg: staplar med rutor
6. Skålarna	medelvärde	Pröva och förbättra: varje boll i en tabell	medelvärdena på tallinjer
7. Kvadraten	algebra och area	Pröva och förbättra: olika rektanglar	sidan är halva omkretsen
8. De lutande kvadraterna	area och Pythagoras sats	Rita eller bygg: rama in och dra bort	Leta efter ett mönster i en tabell
9. Staketet	största arean, en funktion	Gör en tabell: bredd och längd i hela meter	Skriv ett uttryck och rita en graf
10. Alla summor	mönster och potenser	Gör en lista: summor i ordning	Rita eller bygg: klossar med luckor

Så använder du problemen	
Ordningen	Ta problemen i ordning, ett per pass, och byt ordning när gruppen behöver arbeta med ett annat område eller ett problem som liknar det förra. De första är lättast att börja på.
Kopiorna	Kopiera problemets sida till varje par, eller visa den på tavlan. I Jämföra får varje par bladet Två lösningar, med B under ett papper tills gruppen har sagt vad A gör.

© Niclas Fohlin. Ur Problemlösning i grupp, https://niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp.

Lärarens sida: Avancerat, problem 1, Cykelförrådet

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

I förskolans cykelförråd står 11 cyklar. Några är tvåhjulingar och några är trehjulingar. Tillsammans har cyklarna 27 hjul.

Hur många tvåhjulingar och hur många trehjulingar står i förrådet?

Problemet handlar om två okända tal som hänger ihop, antalet tvåhjulingar och antalet trehjulingar, som i Ljusstakarna i Bas. Svaret är 6 tvåhjulingar och 5 trehjulingar. Eleverna går från en tabell till en ekvation och ser att en trehjuling har ett hjul mer än en tvåhjuling. Idén kommer ur Problembanken åk 7–9, problem 8.

Lösning A

tvåhjulingar	trehjulingar	hjul
11	0	22 för få
9	2	24
7	4	26
6	5	27 ✓

Så räknade vi raden 7 och 4:

$7 \cdot 2 = 14$

$4 \cdot 3 = 12$

$14 + 12 = 26$

Lösning B

x = antalet trehjulingar

$11 - x$ = antalet tvåhjulingar

$3x + 2(11 - x) = 27$

$\downarrow$

$3x + 22 - 2x = 27$ $\quad 2 \cdot 11 = 22$

$\downarrow$

$x + 22 = 27 \longrightarrow x = 27 - 22 = 5$

5 trehjulingar och $11 - 5 = 6$ tvåhjulingar

Kontroll: $5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 15 + 12 = 27$ ✓

I passet	
Ringa in	Frågan, talen 11 och 27, och orden tvåhjulingar och trehjulingar.
Lyft ut	Vi vet: 11 cyklar, 27 hjul, två eller tre hjul på varje cykel. Vi ska ta reda på: hur många av varje sort, två okända tal.
Ord och tal	Peka på tvåhjulingen och trehjulingen i bilden. Fråga: Vad räknar 11, och vad räknar 27?
Förutse	En tabell, cyklar som ritas och får hjul, två hjul på alla först, eller en ekvation. Några tar 9 trehjulingar och glömmer de 11 cyklarna.
Kör de fast	Föreslå: Rita elva cyklar, eller pröva ett antal i en tabell. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att 8 tvåhjulingar och 3 trehjulingar gav 25 hjul. Försök använda det!
Säg inte	Ge alla cyklar två hjul och räkna hjulen som blir över. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: 5 cyklar och 12 hjul (3 tvåhjulingar och 2 trehjulingar). Större: Fasaner och kaniner på en gård har tillsammans 35 huvuden och 94 fötter. Hur många av varje? (23 fasaner och 12 kaniner) Kan 15 cyklar ha 50 hjul? (Nej, högst $15 \cdot 3 = 45$)
Jämför	En trehjuling har ett hjul mer. I A ger varje trehjuling 1 hjul till. I B är 22 hjulen om alla har två, och x de som blir över.
Fel eller osäker	Ni säger att 9 trehjulingar ger 27 hjul. Hur kan ni kontrollera att det stämmer med problemet? Ni säger att $x = 5$. Vad räknar x, och svarar det på frågan?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Cykelförrådet

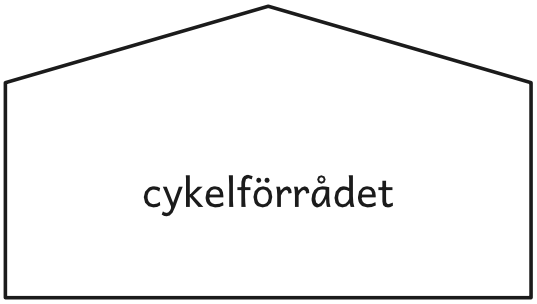
I förskolans cykelförråd står 11 cyklar. Några är tvåhjulingar och några är trehjulingar. Tillsammans har cyklarna 27 hjul.



tvåhjuling: 2 hjul



trehjuling: 3 hjul



Frågan

Hur många tvåhjulingar och hur många trehjulingar står i förrådet?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Cykelförrådet

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

tvåhjulingar	trehjulingar	hjul
11	0	22 för få
9	2	24
7	4	26
6	5	27 ✓

Så räknade vi raden 7 och 4:

$7 \cdot 2 = 14$

$4 \cdot 3 = 12$

$14 + 12 = 26$

Lösning B

x = antalet trehjulingar

$11 - x$ = antalet tvåhjulingar

$3x + 2(11 - x) = 27$

↓

$3x + 22 - 2x = 27$ $\quad 2 \cdot 11 = 22$

↓

$x + 22 = 27 \longrightarrow x = 27 - 22 = 5$

5 trehjulingar och $11 - 5 = 6$ tvåhjulingar

Kontroll: $5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 15 + 12 = 27$ ✓

Frågor att prata om

1. Vad gör eleven i lösning A från rad till rad?
2. Varför skriver eleven i lösning B $11 - x$ för tvåhjulingarna?
3. Var syns det i båda lösningarna att en trehjuling har ett hjul mer än en tvåhjuling?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 110 cyklar och 270 hjul, och varför?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

LÖSNINGSFÖRSLAG · ALGEBRA

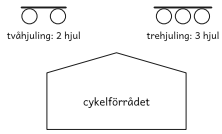
CYKELFÖRRÅDET

PROBLEMET

I förskolans cykelförråd står 11 cyklar. Några är tvåhjulingar och några är trehjulingar. Tillsammans har cyklarna 27 hjul.

Hur många tvåhjulingar och hur många trehjulingar står i förrådet?

Svaret: 6 tvåhjulingar och 5 trehjulingar.
Kontroll: 6 · 2 + 5 · 3 = 12 + 15 = 27, och 6 + 5 = 11.



IDÉN: *Två okända tal som hänger ihop: en trehjuling har ett hjul mer än en tvåhjuling.*

LÖSNING A: BYTA UT TVÅHJULINGAR

tvåhjulingar	trehjulingar	hjul
11	0	22 för få
9	2	24
7	4	26
6	5	27 ✓

Så räknade vi raden 7 och 4:

7 · 2 = 14
4 · 3 = 12
14 + 12 = 26

Eleven prövar i en tabell och byter tvåhjulingar mot trehjulingar, tills hjulen blir 27.

LÖSNING B: KALLA TREHJULINGARNA X

x = antalet trehjulingar
11 − x = antalet tvåhjulingar

3x + 2(11 − x) = 27
↓
3x + 22 − 2x = 27 2 · 11 = 22
↓
x + 22 = 27 ⟶ x = 27 − 22 = 5

5 trehjulingar och 11 − 5 = 6 tvåhjulingar

Kontroll: 5 · 3 + 6 · 2 = 15 + 12 = 27 ✓

Eleven kallar trehjulingarna x och tvåhjulingarna 11 − x och löser 3x + 2(11 − x) = 27.

LÖSNING C: TANKEVURPA

Om alla är trehjulingar:
27 / 3 = 9
Svar: 9 trehjulingar.

Hjulen stämmer, men det blir bara 9 cyklar, och det ska vara 11.
Fråga: ”Vilket villkor i problemet har eleven glömt?”

FRÅGOR OM TANKARNA BAKOM

1. Vad gör eleven i lösning A från rad till rad?
2. Varför skriver eleven i lösning B 11 − x för tvåhjulingarna?
3. Var syns det i båda lösningarna att en trehjuling har ett hjul mer än en tvåhjuling?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 110 cyklar och 270 hjul, och varför?

VISA OCH JÄMFÖR LÖSNINGAR

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Lärarens sida: Avancerat, problem 2, Glasstapeln

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

I ett skåp är det 36 cm mellan två hyllor. Glasen i skåpet är likadana och staplas i varandra. En stapel med 2 glas är 18 cm hög. En stapel med 8 glas är 42 cm hög.

Hur många glas kan stå i en stapel mellan hyllorna?

Ett linjärt samband: varje glas ger lika mycket till, men höjden är inte proportionell mot antalet glas. Svaret är 6 glas, en stapel på 34 cm. Eleverna tecknar ett uttryck, 10 + 4n, ur en tabell eller en bild och löser en ekvation. Material: muggar som går att stapla, och en linjal. Idén kommer ur Känguru 2022, Cadet nr 10.

Lösning A

Från 2 till 8 glas:

8 − 2 = 6 glas mer

42 − 18 = 24 cm mer

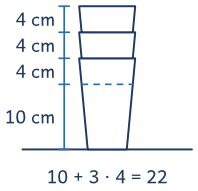
↓

24 / 6 = 4 cm per glas

Svar: 6 glas

	glas	höjd i cm
	2	18
+4 ↓	3	22
+4 ↓	4	26
+4 ↓	5	30
+4 ↓	6	34 ✓
+4 ↓	7	38 för högt

Lösning B



10 + 3 · 4 = 22

Varje glas: (42 − 18) / 6 = 4 cm till

Glaset utan kanten: 18 − 2 · 4 = 10 cm

↓

n glas: 10 + 4n cm

↓

10 + 4n = 36 ger 4n = 26

↓

n = 26 / 4 = 6,5, så 6 glas

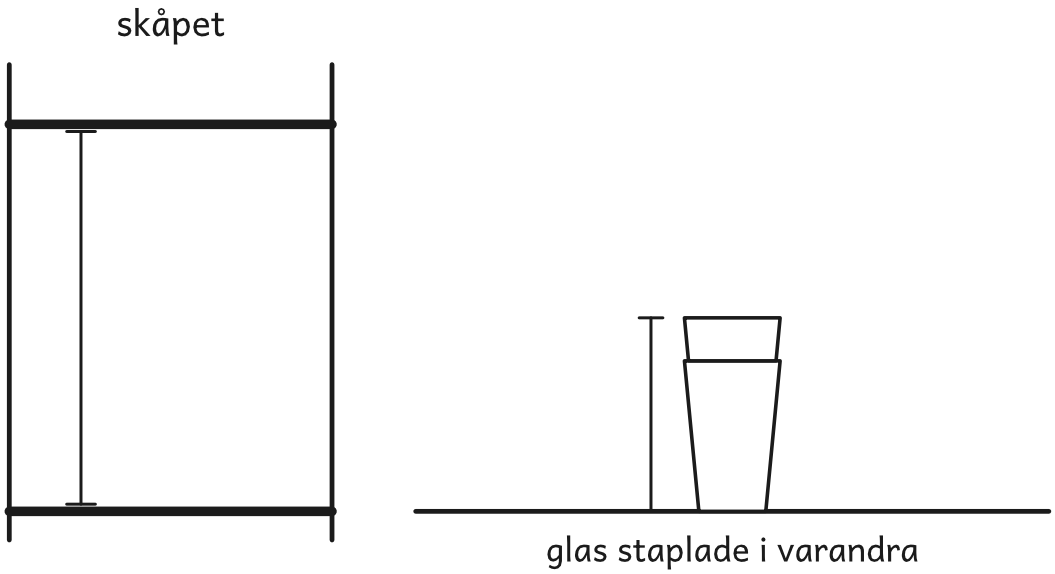
Kontroll: 10 + 4 · 6 = 34 cm ryms, men 10 + 4 · 7 = 38 cm är för högt. ✓

I passet	
Ringa in	Frågan, talen 36, 2, 18, 8 och 42, och orden *”staplas i varandra”* och *”mellan hyllorna”*.
Lyft ut	Vi vet: 36 cm mellan hyllorna, 2 glas är 18 cm och 8 glas 42 cm. Vi ska ta reda på: hur många glas en stapel mellan hyllorna kan ha.
Ord och tal	Visa bilden, eller ställ två muggar i varandra, så att eleverna ser vad staplas betyder. Fråga: Vad mäter 18, och vad mäter 36?
Förutse	En tabell med ett glas i taget, en ritad stapel, eller ett uttryck. Några tror att ett glas är 9 cm, eftersom 2 glas är 18 cm.
Kör de fast	Föreslå: Gör en tabell med antal glas och höjd. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att 6 glas till gav 24 cm till. Försök använda det!
Säg inte	Varje glas ger 4 cm till, och glaset utan kanten är 10 cm. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: 2 glas är 18 cm, 3 glas är 22 cm och det är 32 cm mellan hyllorna (5 glas, 30 cm). Större: Hur hög är en stapel med 20 glas? (90 cm) Hur många glas ryms under 1 m? (22)
Jämför	Varje glas ger 4 cm till, och de första 10 cm räknas bara en gång. I A växer höjden med 4 cm per rad, och i B är höjden 10 + 4n.
Fel eller osäker	Ni säger att 9 glas får plats. Hur kan ni kontrollera att det stämmer med problemet? Ni säger att det blir 6,5 glas. Hur kan ni kontrollera att det svarar på frågan?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Glasstapeln

I ett skåp är det 36 cm mellan två hyllor. Glasen i skåpet är likadana och staplas i varandra. En stapel med 2 glas är 18 cm hög. En stapel med 8 glas är 42 cm hög.



Frågan

Hur många glas kan stå i en stapel mellan hyllorna?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Glasstapeln

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

Från 2 till 8 glas:

8 − 2 = 6 glas mer

42 − 18 = 24 cm mer

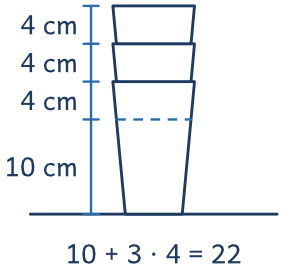
↓

24 / 6 = 4 cm per glas

Svar: 6 glas

	glas	höjd i cm
	2	18
+4 ↓	3	22
+4 ↓	4	26
+4 ↓	5	30
+4 ↓	6	34 ✓
+4 ↓	7	38 för högt

Lösning B



10 + 3 · 4 = 22

Varje glas: (42 − 18) / 6 = 4 cm till

Glaset utan kanten: 18 − 2 · 4 = 10 cm

↓

n glas: 10 + 4n cm

↓

10 + 4n = 36 ger 4n = 26

↓

n = 26 / 4 = 6,5, så 6 glas

Kontroll: 10 + 4 · 6 = 34 cm ryms, ✓
men 10 + 4 · 7 = 38 cm är för högt.

Frågor att prata om

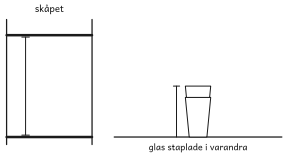
1. Vad gör eleven i lösning A från rad till rad?
2. Varför räknar eleven i lösning B 18 − 2 · 4?
3. Var syns det i båda lösningarna att varje glas ger 4 cm till?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om hyllorna var 2 m isär, och varför?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Glasstapeln

Problemet

I ett skåp är det 36 cm mellan två hyllor. Glasen i skåpet är likadana och staplas i varandra. En stapel med 2 glas är 18 cm hög. En stapel med 8 glas är 42 cm hög.



Hur många glas kan stå i en stapel mellan hyllorna?

Svaret: 6 glas. Stapeln blir 34 cm hög.
Kontroll: 10 + 4 · 2 = 18, 10 + 4 · 8 = 42, och 6 glas är 34 cm och 7 glas 38.

Idén: *Varje glas ger 4 cm till, och de första 10 cm räknas bara en gång.*

Lösning A: ett glas i taget

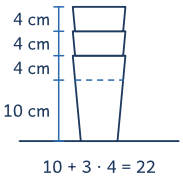
Från 2 till 8 glas:
8 − 2 = 6 glas mer
42 − 18 = 24 cm mer
↓
24 / 6 = 4 cm per glas

Svar: 6 glas

	glas	höjd i cm
	2	18
+4 ↓	3	22
+4 ↓	4	26
+4 ↓	5	30
+4 ↓	6	34 ✓
+4 ↓	7	38 för högt

Eleven räknar ut att varje glas ger 4 cm till och fortsätter tabellen tills stapeln blir för hög.

Lösning B: uttrycket 10 + 4n



Varje glas: (42 − 18) / 6 = 4 cm till
Glaset utan kanten: 18 − 2 · 4 = 10 cm
↓
n glas: 10 + 4n cm
↓
10 + 4n = 36 ger 4n = 26
↓
n = 26 / 4 = 6,5, så 6 glas

Kontroll: 10 + 4 · 6 = 34 cm ryms, men 10 + 4 · 7 = 38 cm är för högt. ✓

Eleven skriver höjden som 10 + 4n, löser 10 + 4n = 36 och väljer 6 hela glas.

Lösning C: tankevurpa

2 glas är 18 cm.
18 / 2 = 9 cm per glas
36 / 9 = 4
Svar: 4 glas.

Glasen står i varandra, så stapeln växer 4 cm per glas. De första 10 cm räknas bara en gång.
Fråga: ”Hur hög blir stapeln med 8 glas i elevens lösning?”

Frågor om tankarna bakom

1. Vad gör eleven i lösning A från rad till rad?
2. Varför räknar eleven i lösning B 18 − 2 · 4?
3. Var syns det i båda lösningarna att varje glas ger 4 cm till?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om hyllorna var 2 m isär, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Lärarens sida: Avancerat, problem 3, Stenplattorna

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

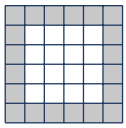
Uteplatser läggs med kvadratiska stenplattor. I mitten ligger ljusa plattor i en kvadrat, och runt dem ligger en ram av mörka plattor. Bilden visar de tre första uteplatserna, figur 1, 2 och 3, och mönstret fortsätter likadant.

Hur många ljusa och hur många mörka plattor behövs till figur 5 och till figur 10?

Skriv en regel för de ljusa och de mörka plattorna i figur n.

Ett mönster som växer: figur n har n^2 ljusa plattor och 4n + 4 mörka. Figur 5 har 25 ljusa och 24 mörka, och figur 10 har 100 och 44. Eleverna går från en tabell till en regel och ser figuren på två sätt. Material: rutat papper eller brickor. Idén kommer ur Hagland, Hedrén och Taflin (2005) och Lithner m.fl. (2025).

Lösning A



figur 4

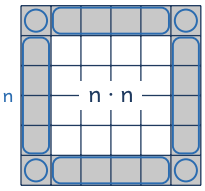
figur	ljusa	mörka	
1	1	8	
2	4	12	+4
3	9	16	+4
4	16	20	+4
5	25	24	+4
10	100	44	

figur 10:
10 · 10 = 100
24 + 5 · 4 = 44

mörka:
4 · 1 + 4 = 8
4 · 2 + 4 = 12

figur n:
n · n ljusa
4n + 4 mörka

Lösning B



figur 4: n = 4

ljusa: n · n = n^2
mörka: 4 sidor med n och 4 hörn, 4n + 4
↓
figur 5: 5^2 = 25 ljusa och 4 · 5 + 4 = 24 mörka

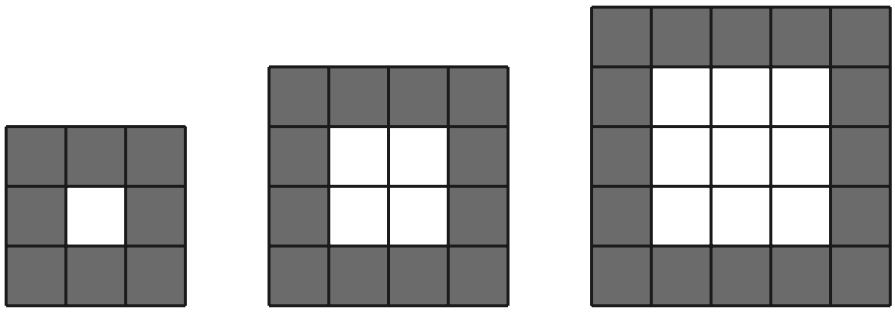
figur 10: 10^2 = 100 ljusa och 4 · 10 + 4 = 44 mörka

Kontroll med figur 3: 3^2 = 9 och 4 · 3 + 4 = 16 ✓

I passet	
Ringa in	Frågorna, figur 5, 10 och n, och orden ljusa, mörka och ram.
Lyft ut	Vi vet: hur figur 1, 2 och 3 ser ut, ljusa i mitten och mörka runt. Vi ska ta reda på: antalet av varje slag i figur 5, 10 och n.
Ord och tal	Peka på ramen och mitten i bilden. Fråga: Vad betyder figur 10, och vad står n för?
Förutse	Figurer på rutat papper, en tabell, eller en regel ur figuren. Några tror att figur 10 har dubbelt så många som figur 5.
Kör de fast	Föreslå: Rita figur 4 och skriv antalen i en tabell. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att de mörka blir 4 fler varje gång. Försök använda det!
Säg inte	Sidan i den ljusa kvadraten är figurens nummer. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Rita figur 4 och räkna båda slagen (16 ljusa och 20 mörka). Större: Vilken figur har 100 mörka plattor? (Figur 24) Från vilken figur är de ljusa fler än de mörka? (Figur 5)
Jämför	De mörka ökar med 4, en på varje sida. I A syns det i tabellen, och i B i 4n: var och en av de fyra sidorna har n plattor.
Fel eller osäker	Ni säger att figur 10 har 48 mörka. Hur kan ni kontrollera att det stämmer med bilden? *”Är regeln rätt?”* Hur kan ni pröva den på figur 1, 2 och 3?

Stenplattorna

Uteplatser läggs med kvadratiska stenplattor. I mitten ligger ljusa plattor i en kvadrat, och runt dem ligger en ram av mörka plattor. Bilden visar de tre första uteplatserna, figur 1, 2 och 3, och mönstret fortsätter likadant.



figur 1 figur 2 figur 3

Frågorna

1. Hur många ljusa och hur många mörka plattor behövs till figur 5 och till figur 10?
2. Skriv en regel för de ljusa och de mörka plattorna i figur n.

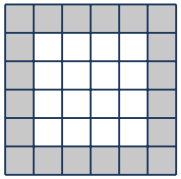
Till läraren · Hör till: Lärarens sida, bladet Två lösningar och lösningsförslaget.

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Stenplattorna

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A



figur 4

figur	ljusa	mörka
1	1	8
2	4	12
3	9	16
4	16	20
5	25	24
10	100	44

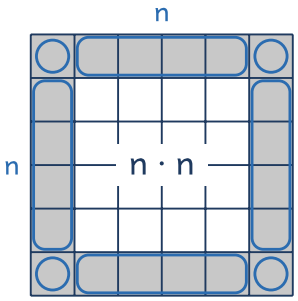
+4 +4 +4 +4

figur 10:
$10 \cdot 10 = 100$
$24 + 5 \cdot 4 = 44$

mörka:
$4 \cdot 1 + 4 = 8$
$4 \cdot 2 + 4 = 12$

figur n:
n · n ljusa
4n + 4 mörka

Lösning B



figur 4: n = 4

ljusa: $n \cdot n = n^2$
mörka: 4 sidor med n
och 4 hörn, 4n + 4
↓
figur 5: $5^2 = 25$ ljusa
och $4 \cdot 5 + 4 = 24$ mörka

figur 10: $10^2 = 100$ ljusa
och $4 \cdot 10 + 4 = 44$ mörka

Kontroll med figur 3: $3^2 = 9$ och $4 \cdot 3 + 4 = 16$ ✓

Frågor att prata om

1. Vad gör eleven i lösning A från rad till rad i tabellen?
2. Varför delar eleven i lösning B de mörka i fyra sidor och fyra hörn?
3. Var syns det i båda lösningarna att de mörka blir fyra fler för varje figur?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja för figur 100, och varför?

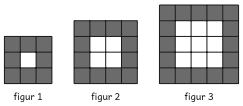
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

LÖSNINGSFÖRSLAG · ALGEBRA

STENPLATTORNA

PROBLEMET

Uteplatser läggs med kvadratiska stenplattor. I mitten ligger ljusa plattor i en kvadrat, och runt dem ligger en ram av mörka plattor. Bilden visar de tre första uteplatserna, figur 1, 2 och 3, och mönstret fortsätter likadant.



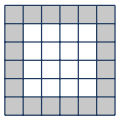
Hur många ljusa och hur många mörka plattor behövs till figur 5 och till figur 10?

Skriv en regel för de ljusa och de mörka plattorna i figur n.

Svaret: Figur 5: 25 ljusa, 24 mörka. Figur 10: 100, 44. Figur n: n^2, $4n + 4$.
Kontroll: $5^2 = 25$ och $7^2 - 5^2 = 24$, $10^2 = 100$ och $12^2 - 10^2 = 44$.

IDÉN: *De ljusa är en kvadrat med sidan n, och de mörka ökar med 4, en på varje sida.*

LÖSNING A: FIGUR FÖR FIGUR


figur 4

figur	ljusa	mörka
1	1	8
2	4	12
3	9	16
4	16	20
5	25	24
10	100	44

+4 +4 +4 +4

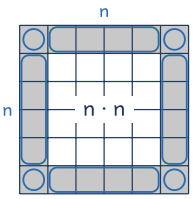
figur 10:
$10 \cdot 10 = 100$
$24 + 5 \cdot 4 = 44$

mörka:
$4 \cdot 1 + 4 = 8$
$4 \cdot 2 + 4 = 12$

figur n:
$n \cdot n$ ljusa
$4n + 4$ mörka

Eleven ritar figur 4, för in figur 1 till 5 i en tabell och ser regeln i talen.

LÖSNING B: SE STRUKTUREN



figur 4: n = 4

ljusa: $n \cdot n = n^2$
mörka: 4 sidor med n och 4 hörn, $4n + 4$
↓
figur 5: $5^2 = 25$ ljusa och $4 \cdot 5 + 4 = 24$ mörka
figur 10: $10^2 = 100$ ljusa och $4 \cdot 10 + 4 = 44$ mörka

Kontroll med figur 3: $3^2 = 9$ och $4 \cdot 3 + 4 = 16$ ✓

Eleven ser de ljusa som en kvadrat med sidan n och de mörka som fyra sidor och fyra hörn.

LÖSNING C: TANKEVURPA

Figur 5: 25 ljusa och 24 mörka
Figur 10 är dubbelt så stor.
$2 \cdot 25 = 50$ och $2 \cdot 24 = 48$
Svar: 50 ljusa och 48 mörka.

Med dubbla sidan blir de ljusa fyra gånger så många, $10 \cdot 10 = 100$, och de mörka blir 44.
Fråga: ”Vad ger elevens sätt för figur 2, och vad visar bilden?”

FRÅGOR OM TANKARNA BAKOM

1. Vad gör eleven i lösning A från rad till rad i tabellen?
2. Varför delar eleven i lösning B de mörka i fyra sidor och fyra hörn?
3. Var syns det i båda lösningarna att de mörka blir fyra fler för varje figur?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja för figur 100, och varför?

VISA OCH JÄMFÖR LÖSNINGAR

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Hagland, Hedrén och Taflin (2005) och Lithner m.fl. (2025).

Lärarens sida: Avancerat, problem 4, Udda eller jämnt

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

I en påse ligger fem kulor med talen 2, 3, 4, 5 och 6. Du drar två kulor samtidigt och lägger ihop talen. Blir summan ett jämnt tal vinner du. Blir summan ett udda tal vinner din kompis.

Är spelet rättvist? Visa hur ni vet.

Sannolikhet med alla utfall: av 10 möjliga par ger 4 en jämn summa och 6 en udda. Spelet är inte rättvist, och chansen att vinna med jämn summa är 4 av 10. Eleverna listar systematiskt och resonerar med udda och jämnt. Material: fem lappar med talen 2 till 6 i en påse. Idén kommer ur nrich, Odds and Evens.

Lösning A

kulor	summa	kulor	summa
2 + 3	5	3 + 5	8
2 + 4	6	3 + 6	9
2 + 5	7	4 + 5	9
2 + 6	8	4 + 6	10
3 + 4	7	5 + 6	11

jämn: 4 par

udda: 6 par

Tillsammans 10 par. Jämnt i 4 av 10: inte rättvist.

Lösning B

jämn + jämn = jämn
udda + udda = jämn
jämn + udda = udda

jämna kulor: 2, 4, 6
udda kulor: 3, 5

+	3	5
2	5	7
4	7	9
6	9	11

en jämn och en udda:
3 · 2 = 6 par, udda summa

två jämna: 3 par
två udda: 1 par

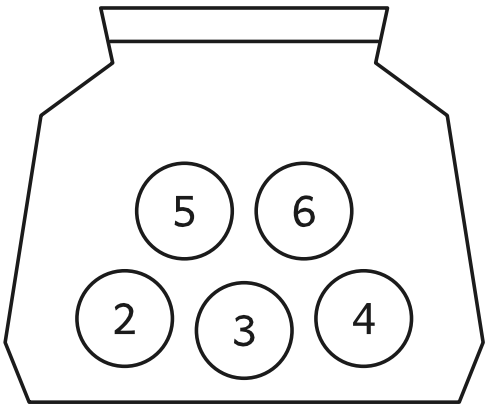
jämn summa: 3 + 1 = 4 par, udda: 6 par Inte rättvist.
Kontroll: 3 + 1 + 6 = 10 par ✓

I passet	
Ringa in	Frågan, talen på kulorna, och orden *”två kulor samtidigt”*, jämnt, udda och rättvist.
Lyft ut	Vi vet: fem kulor, 2 till 6, två dras samtidigt, jämn summa vinner. Vi ska ta reda på: om båda har lika stor chans att vinna.
Ord och tal	Fråga: Vad betyder rättvist, och vilka tal är jämna? Kan samma kula dras två gånger? Är 2 + 4 och 4 + 2 samma par?
Förutse	En lista med alla par, en tabell, eller udda och jämnt. Några tror att jämnt vinner oftare, eftersom tre kulor är jämna.
Kör de fast	Föreslå: Skriv alla par som kan dras, ett i taget. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att två udda tal ger en jämn summa. Försök använda det!
Säg inte	Jämn summa kräver två jämna eller två udda kulor. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Fyra kulor med talen 2, 3, 4 och 5 (inte rättvist, 2 av 6 par ger jämn summa). Större: Vilken kula kan ni ta bort så att spelet blir rättvist? (3 eller 5) Finns det fler svar än 3 och 5? (Nej)
Jämför	Jämn summa kommer från två jämna eller två udda. I A är det paren 2 + 4, 2 + 6, 4 + 6 och 3 + 5, och i B är det 3 + 1 par.
Fel eller osäker	Ni säger att det finns 25 par. Hur kan ni kontrollera att det stämmer med problemet? Hur vet ni att ni har alla par?

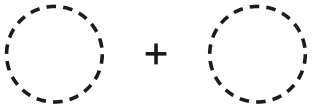
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Udda eller jämnt

I en påse ligger fem kulor med talen 2, 3, 4, 5 och 6. Du drar två kulor samtidigt och lägger ihop talen. Blir summan ett jämnt tal vinner du. Blir summan ett udda tal vinner din kompis.



två kulor



jämn summa: du vinner
udda summa: kompisen vinner

Frågan

Är spelet rättvist? Visa hur ni vet.

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Udda eller jämnt

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

kulor	summa
2 + 3	5
2 + 4	6
2 + 5	7
2 + 6	8
3 + 4	7

kulor	summa
3 + 5	8
3 + 6	9
4 + 5	9
4 + 6	10
5 + 6	11

jämn:
4 par

udda:
6 par

Tillsammans 10 par. Jämnt i 4 av 10: inte rättvist.

Lösning B

jämn + jämn = jämn
udda + udda = jämn
jämn + udda = udda

jämna kulor: 2, 4, 6
udda kulor: 3, 5

+	3	5
2	5	7
4	7	9
6	9	11

en jämn och en udda:
3 · 2 = 6 par, udda summa

två jämna: 3 par
två udda: 1 par

jämn summa: 3 + 1 = 4 par, udda: 6 par Inte rättvist.
Kontroll: 3 + 1 + 6 = 10 par ✓

Frågor att prata om

1. Hur gör eleven i lösning A för att få med alla par?
2. Varför räknar eleven i lösning B 3 · 2 för en kula av varje slag?
3. Var syns de fyra paren med jämn summa i båda lösningarna?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 20 kulor, och varför?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Udda eller jämnt

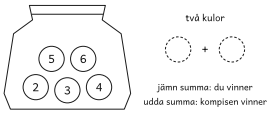
Problemet

I en påse ligger fem kulor med talen 2, 3, 4, 5 och 6. Du drar två kulor samtidigt och lägger ihop talen. Blir summan ett jämnt tal vinner du. Blir summan ett udda tal vinner din kompis.

Är spelet rättvist? Visa hur ni vet.

Svaret: Nej, spelet är inte rättvist: 4 av 10 par ger jämn summa och 6 udda.

Kontroll: 2 + 4, 2 + 6, 4 + 6 och 3 + 5 är jämna, och (5 · 4) / 2 = 10 par.



Idén: *Jämn summa kommer från två jämna eller två udda kulor.*

Lösning A: lista alla tio par

kulor	summa
2 + 3	5
2 + 4	6
2 + 5	7
2 + 6	8
3 + 4	7

kulor	summa
3 + 5	8
3 + 6	9
4 + 5	9
4 + 6	10
5 + 6	11

jämn: 4 par

udda: 6 par

Tillsammans 10 par. Jämnt i 4 av 10: inte rättvist.

Eleven skriver alla tio par i ordning med summan och ringar in de fyra jämna.

Lösning B: udda och jämnt

jämn + jämn = jämn
udda + udda = jämn
jämn + udda = udda

jämna kulor: 2, 4, 6
udda kulor: 3, 5

+	3	5
2	5	7
4	7	9
6	9	11

en jämn och en udda:
3 · 2 = 6 par, udda summa

två jämna: 3 par
två udda: 1 par

jämn summa: 3 + 1 = 4 par, udda: 6 par Inte rättvist.
Kontroll: 3 + 1 + 6 = 10 par ✓

Eleven delar kulorna i jämna och udda och räknar hur många par det blir av varje slag.

Lösning C: tankevurpa

En tabell med 5 · 5 = 25 rutor

Jämn summa i 13 rutor

Udda summa i 12 rutor

Svar: Jämnt vinner oftare.

Fem rutor har samma kula två gånger, som 2 + 2, och jämn summa. Utan dem är 8 av 20 jämna.

Fråga: ”Vilka par i tabellen går inte att dra?”

Frågor om tankarna bakom

1. Hur gör eleven i lösning A för att få med alla par?
2. Varför räknar eleven i lösning B 3 · 2 för en kula av varje slag?
3. Var syns de fyra paren med jämn summa i båda lösningarna?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 20 kulor, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur nrich, Odds and Evens.

Lärarens sida: Avancerat, problem 5, Svamparna

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

Färska svampar består till 80 % av vatten. När svamparna torkar, försvinner en del av vattnet. Torkade svampar består till 20 % av vatten.

Med hur många procent minskar vikten när svamparna torkas?

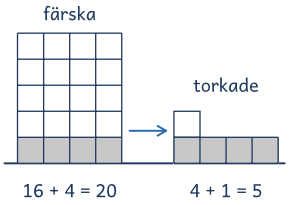
Problemet handlar om procent av en helhet som ändras, medan det torra i svamparna väger lika mycket. Vikten minskar med 75 %, så att en fjärdedel är kvar. Eleverna väljer en vikt att räkna med och följer det torra, med tal eller staplar. Material: rutat papper. Idén kommer ur Känguru 2024, Cadet nr 16.

Lösning A

Om svamparna väger 100 g:
vatten 80 g och torrt 20 g
↓
Torkade: torrt 20 g är 80 %
↓
10 % är 20 / 8 = 2,5 g
↓
100 % är 2,5 · 10 = 25 g

100 − 25 = 75 g mindre, alltså 75 %
Kontroll: 25 − 20 = 5 g vatten, och 5 av 25 är 20 % ✓

Lösning B



Färska: 20 rutor,
4 torra är 20 %
↓
Torkade: 4 torra
är 80 %, 1 vatten
↓
5 av 20 rutor kvar,
en fjärdedel

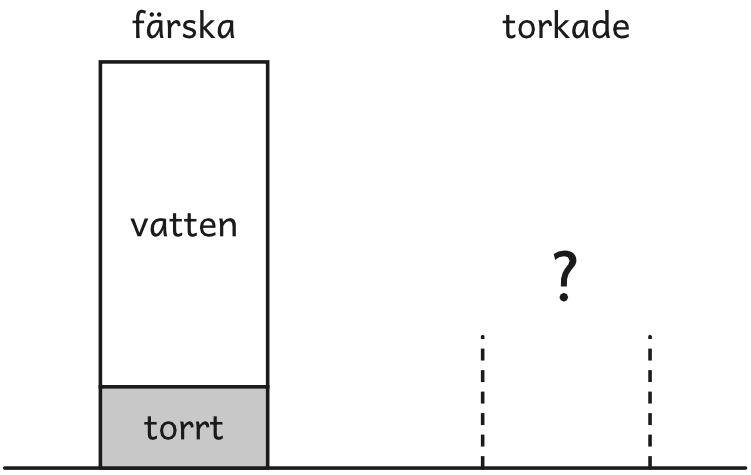
Minskar med 75 %
Kontroll: 1 av 5 är 20 % ✓

I passet	
Ringa in	Frågan, talen 80 % och 20 %, och orden färska, torkade och minskar.
Lyft ut	Vi vet: färska är 80 % vatten, torkade 20 % vatten, och bara vatten försvinner. Vi ska ta reda på: hur många procent vikten minskar.
Ord och tal	Peka på stapelns två delar, vattnet och det torra. Fråga: 80 % av vad? Är helheten densamma för 80 % och 20 %?
Förutse	Staplar eller rutor, procent direkt eller ett tal att börja med, som 100 g. Många svarar 60 %, eftersom 80 − 20 = 60.
Kör de fast	Föreslå: Välj en vikt för de färska svamparna och räkna. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att 100 g färska svampar har 20 g torrt. Försök använda det!
Säg inte	Det torra väger lika mycket före och efter. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: 100 g svampar är 75 % vatten. De torkar tills de är 50 % vatten. Vad väger de nu? (50 g) Större: 100 kg gurkor är 99 % vatten. De torkar tills de är 98 % vatten. Vad väger de nu? (50 kg)
Jämför	Det torra väger lika mycket före och efter, 20 g i A och 4 rutor i B. Lyft fram att procenten räknas på olika helheter.
Fel eller osäker	Ni säger att vikten minskar med 60 %. Hur kan ni kontrollera att det stämmer med problemet? *”Är 25 g svaret?”* Hur kan ni kontrollera att det svarar på frågan?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Svamparna

Färska svampar består till 80 % av vatten. När svamparna torkar, försvinner en del av vattnet. Torkade svampar består till 20 % av vatten.



Frågan

Med hur många procent minskar vikten när svamparna torkas?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Svamparna

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

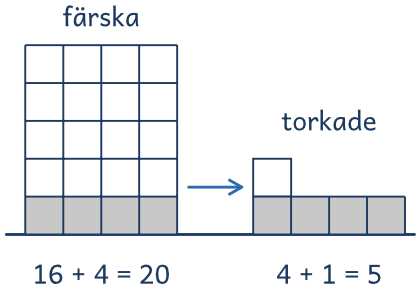
Om svamparna väger 100 g:
vatten 80 g och torrt 20 g
↓
Torkade: torrt 20 g är 80 %
↓
10 % är 20 / 8 = 2,5 g
↓
100 % är 2,5 · 10 = 25 g

---

100 − 25 = 75 g mindre, alltså 75 %

Kontroll: 25 − 20 = 5 g vatten, och 5 av 25 är 20 % ✓

Lösning B



Färska: 20 rutor,
4 torra är 20 %
↓
Torkade: 4 torra
är 80 %, 1 vatten
↓
5 av 20 rutor kvar,
en fjärdedel

Minskar med 75 %

Kontroll: 1 av 5 är 20 % ✓

Frågor att prata om

1. Vad gör eleven i lösning A med de 20 g som inte är vatten?
2. Varför är det 4 torra rutor i båda staplarna i lösning B?
3. Var syns det i båda lösningarna att det torra väger lika mycket före och efter?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om svamparna var 90 % vatten, och varför?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Svamparna

Problemet

Färska svampar består till 80 % av vatten. När svamparna torkar, försvinner en del av vattnet. Torkade svampar består till 20 % av vatten.

Med hur många procent minskar vikten när svamparna torkas?

Svaret: Vikten minskar med 75 %, så att en fjärdedel är kvar.
Kontroll: 100 g blir 25 g: 20 g torrt och 5 g vatten, och 5 av 25 är 20 %.



Idén: *Det torra väger lika mycket före och efter, och procenten räknas på olika helheter.*

Lösning A: börja med 100 g

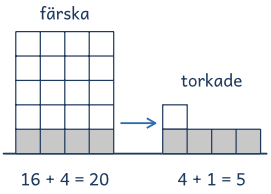
Om svamparna väger 100 g:
vatten 80 g och torrt 20 g
↓
Torkade: torrt 20 g är 80 %
↓
10 % är 20 / 8 = 2,5 g
↓
100 % är 2,5 · 10 = 25 g

---

100 − 25 = 75 g mindre, alltså 75 %
Kontroll: 25 − 20 = 5 g vatten, och 5 av 25 är 20 % ✓

Eleven tänker sig 100 g färska svampar och följer de 20 g torrt, som blir 80 % av de torkade.

Lösning B: staplar med rutor



Färska: 20 rutor,
4 torra är 20 %
↓
Torkade: 4 torra
är 80 %, 1 vatten
↓
5 av 20 rutor kvar,
en fjärdedel

Minskar med 75 %
Kontroll: 1 av 5 är 20 % ✓

Eleven ritar de färska som 20 rutor med 4 torra, och de 4 torra blir 80 % av de torkade.

Lösning C: tankevurpa

Vatten före: 80 %
Vatten efter: 20 %
80 − 20 = 60
Svar: Vikten minskar med 60 %.

80 % och 20 % räknas på olika helheter. Av 100 g blir 25 g kvar, och vikten minskar med 75 %.
Fråga: ”80 % av vad, och 20 % av vad?”

Frågor om tankarna bakom

1. Vad gör eleven i lösning A med de 20 g som inte är vatten?
2. Varför är det 4 torra rutor i båda staplarna i lösning B?
3. Var syns det i båda lösningarna att det torra väger lika mycket före och efter?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om svamparna var 90 % vatten, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Känguru 2024, Cadet nr 16.

Lärarens sida: Avancerat, problem 6, Skålarna

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

I en röd skål ligger fem bollar med talen 3, 7, 9, 10 och 11. I en blå skål ligger fyra bollar med talen 2, 4, 6 och 8. Du ska flytta en av bollarna i den röda skålen till den blå.

Vilken boll ska du flytta för att medelvärdet ska bli större i båda skålarna?

Problemet handlar om medelvärdet som balanspunkt. En boll som är mindre än medelvärdet höjer det när den tas bort, och en som är större höjer det när den läggs till. Svaret är bollen 7. Eleverna prövar i en tabell och resonerar om medelvärdet. Material: lappar med bollarnas tal, i två högar. Idén kommer ur Känguru 2025, Cadet nr 17.

Lösning A

flytta	röd	blå
nu	40 / 5 = 8	20 / 4 = 5
3	9,25 ↑	4,6 ↓
7	8,25 ↑	5,4 ↑
9	7,75 ↓	5,8 ↑
10	7,5 ↓	6 ↑
11	7,25 ↓	6,2 ↑

Så räknade vi 7:

röd: 40 − 7 = 33
33 / 4 = 8,25

blå: 20 + 7 = 27
27 / 5 = 5,4

båda större ✓

↑ större
↓ mindre

Lösning B

röd: 40 / 5 = 8



blå: 20 / 4 = 5



△ är medelvärdet

Ta bort en boll under 8:
röd blir större.

Lägg till en boll över 5:
blå blir större.

↓

Bara 7 ligger mellan 5 och 8.

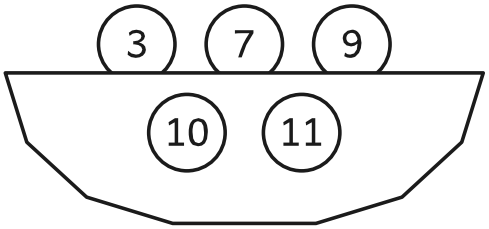
Kontroll:
röd: 33 / 4 = 8,25
blå: 27 / 5 = 5,4 ✓

I passet	
Ringa in	Frågan, talen på bollarna, och orden flytta, medelvärdet och *”båda skålarna”*.
Lyft ut	Vi vet: bollarna i varje skål, och att en boll flyttas från den röda skålen till den blå. Vi ska ta reda på: vilken boll som höjer båda medelvärdena.
Ord och tal	Peka på skålarna. Fråga: Vad betyder medelvärde, och hur räknar man ut det? Vad händer med summan och antalet bollar när en boll flyttas?
Förutse	En tabell där varje boll prövas, eller ett resonemang om medelvärdet. Några tror att det inte går, eftersom medelvärdet i den ena skålen måste minska.
Kör de fast	Föreslå: Räkna ut medelvärdet i båda skålarna, och pröva att flytta en boll. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att om 11 flyttas blir medelvärdet i den röda mindre. Försök använda det!
Säg inte	Bollen ska vara mindre än 8 och större än 5. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Den röda skålen har 2, 5 och 11, och den blå 1 och 3 (flytta bollen 5). Större: Kan ni flytta en boll från blå till röd, så att båda medelvärdena ökar? Varför? (Nej: bollen skulle behöva vara under 5 och över 8)
Jämför	Bollen ska vara under det röda medelvärdet och över det blå. I A syns det i tabellen, och i B ligger 7 mellan 5 och 8.
Fel eller osäker	Ni säger att 3 ska flyttas. Hur kan ni kontrollera att det stämmer med problemet? Ni delar summan i den blå med 4. Hur många bollar ligger i den blå nu?

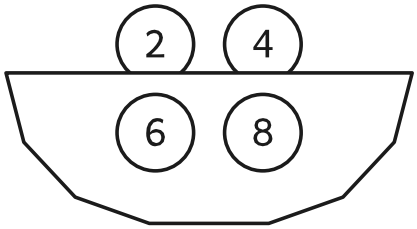
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Skålarna

I en röd skål ligger fem bollar med talen 3, 7, 9, 10 och 11. I en blå skål ligger fyra bollar med talen 2, 4, 6 och 8. Du ska flytta en av bollarna i den röda skålen till den blå.



röd skål



blå skål

Frågan

Vilken boll ska du flytta för att medelvärdet ska bli större i båda skålarna?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Skålarna

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

flytta	röd	blå
nu	40 / 5 = 8	20 / 4 = 5
3	9,25 ↑	4,6 ↓
7	8,25 ↑	5,4 ↑
9	7,75 ↓	5,8 ↑
10	7,5 ↓	6 ↑
11	7,25 ↓	6,2 ↑

Så räknade vi 7:

röd: 40 − 7 = 33
33 / 4 = 8,25

blå: 20 + 7 = 27
27 / 5 = 5,4

båda större ✓

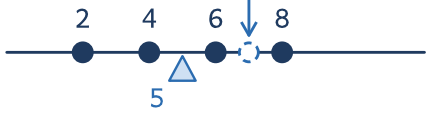
↑ större
↓ mindre

Lösning B

röd: 40 / 5 = 8



blå: 20 / 4 = 5



△ är medelvärdet

Ta bort en boll under 8:
röd blir större.

Lägg till en boll över 5:
blå blir större.

↓

Bara 7 ligger mellan
5 och 8.

Kontroll:
röd: 33 / 4 = 8,25
blå: 27 / 5 = 5,4 ✓

Frågor att prata om

1. Vad gör eleven i lösning A med varje boll?
2. Varför ska bollen i lösning B vara mindre än 8 och större än 5?
3. Var syns det i båda lösningarna att bollen ska ligga mellan de två medelvärdena?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 50 bollar i varje skål, och varför?

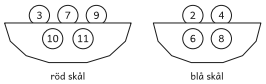
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Lösningsförslag · Sannolikhet och statistik

Skålarna

Problemet

I en röd skål ligger fem bollar med talen 3, 7, 9, 10 och 11. I en blå skål ligger fyra bollar med talen 2, 4, 6 och 8. Du ska flytta en av bollarna i den röda skålen till den blå.



Vilken boll ska du flytta för att medelvärdet ska bli större i båda skålarna?

Svaret: Bollen 7. Medelvärdena blir 8,25 och 5,4.
Kontroll: Röd 8 blir 33 / 4 = 8,25, och blå 5 blir 27 / 5 = 5,4.

Idén: *Medelvärdet är en balanspunkt: bollen ska vara under det röda medelvärdet och över det blå.*

Lösning A: pröva varje boll

flytta	röd	blå
nu	40 / 5 = 8	20 / 4 = 5
3	9,25 ↑	4,6 ↓
7	8,25 ↑	5,4 ↑
9	7,75 ↓	5,8 ↑
10	7,5 ↓	6 ↑
11	7,25 ↓	6,2 ↑

Så räknade vi 7:

röd: 40 − 7 = 33
33 / 4 = 8,25

blå: 20 + 7 = 27
27 / 5 = 5,4

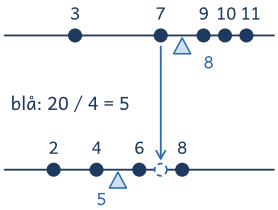
båda större ✓

↑ större
↓ mindre

Eleven räknar medelvärdena och prövar att flytta varje boll, och bara 7 gör båda större.

Lösning B: medelvärdet som balanspunkt

röd: 40 / 5 = 8



Ta bort en boll under 8: röd blir större.

Lägg till en boll över 5: blå blir större.

↓

Bara 7 ligger mellan 5 och 8.

Kontroll:
röd: 33 / 4 = 8,25
blå: 27 / 5 = 5,4 ✓

Eleven ser medelvärdena som balanspunkter och letar efter en boll mellan 5 och 8.

Lösning C: tankevurpa

Röd utan 3: 37 / 4 = 9,25

Blå med 3: 23 / 4 = 5,75

Båda blir större.

Svar: Bollen 3.

Eleven delar summan i den blå med 4, men där ligger 5 bollar: 23 / 5 = 4,6, mindre än 5.

Fråga: ”Hur många bollar ligger i den blå i elevens svar?”

Frågor om tankarna bakom

1. Vad gör eleven i lösning A med varje boll?
2. Varför ska bollen i lösning B vara mindre än 8 och större än 5?
3. Var syns det i båda lösningarna att bollen ska ligga mellan de två medelvärdena?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 50 bollar i varje skål, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Lärarens sida: Avancerat, problem 7, Kvadraten

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

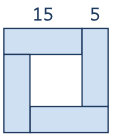
Fyra likadana rektanglar ligger runt en liten kvadrat. Rektanglarna och den lilla kvadraten bildar tillsammans en stor kvadrat, som på bilden. Varje rektangel har omkretsen 40 cm.

Vilken area har den stora kvadraten?

Problemet handlar om ett samband mellan omkrets och area. Den stora kvadratens sida är rektangelns långa sida plus den korta, alltså halva rektangelns omkrets. Svaret är 400 cm², vilken rektangel det än är. Eleverna prövar med tal och generaliserar. Material: rutat papper och fyra likadana rektanglar av papper. Idén kommer ur Nämnaren 2014:4, Problemavdelningen nr 4123.

Lösning A

lång	kort	omkrets	stora sidan	area
15	5	40	20	400
12	8	40	20	400
18	2	40	20	400



15 + 5 = 20

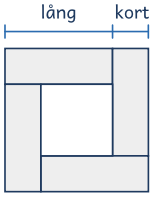
Så räknade vi första raden:

omkrets: 15 + 5 + 15 + 5 = 40

stora sidan: 15 + 5 = 20

area: 20 · 20 = 400 cm² ✓

Lösning B



stora sidan = lång + kort

Omkretsen är 2 långa och 2 korta: 40 cm

↓

lång + kort = 40 / 2 = 20 cm

↓

stora sidan är 20 cm

↓

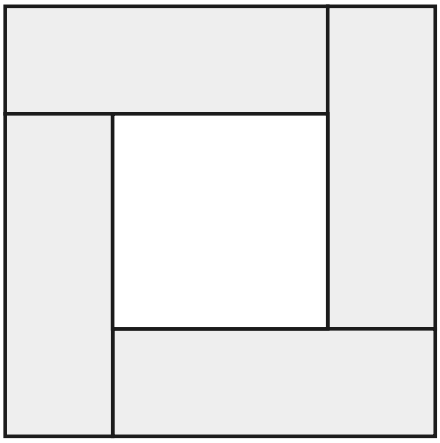
arean: 20 · 20 = 400 cm²

Kontroll med 15 och 5: 15 + 5 + 15 + 5 = 40 och 15 + 5 = 20 ✓

I passet	
Ringa in	Frågan, talet 40, och orden likadana, omkretsen, area och *”den stora kvadraten”*.
Lyft ut	Vi vet: fyra likadana rektanglar, var och en med omkretsen 40 cm. Vi ska ta reda på: arean av den stora kvadraten.
Ord och tal	Peka på en rektangel i bilden, och följ omkretsen runt den. Fråga: Vad mäter 40 cm? Vad är skillnaden på omkrets och area?
Förutse	Olika rektanglar som prövas, en ritning, eller ett resonemang om sidan. Några säger att det inte går, eftersom rektangelns mått inte står i texten.
Kör de fast	Föreslå: Hitta på en rektangel med omkretsen 40 cm och rita den. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att rektangeln 15 och 5 cm gav en stor kvadrat med sidan 20 cm. Försök använda det!
Säg inte	Den stora kvadratens sida är en lång plus en kort sida, halva omkretsen. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Rektanglarna är 7 cm långa och 3 cm breda (100 cm²). Större: Rektanglarna är 15 cm långa. Vilken area har den lilla kvadraten? (100 cm²) Kan den bli hur stor som helst? (Nej, den är alltid mindre än den stora, 400 cm²)
Jämför	Den stora kvadratens sida är en lång plus en kort sida, 20 cm. I A blir den 20 med varje rektangel, och i B är den 40 / 2.
Fel eller osäker	Ni säger att arean är 4 · 75 = 300 cm². Hur kan ni kontrollera att det stämmer med bilden? *”Gäller svaret för alla rektanglar?”* Hur kan ni pröva det?

Kvadraten

Fyra likadana rektanglar ligger runt en liten kvadrat. Rektanglarna och den lilla kvadraten bildar tillsammans en stor kvadrat, som på bilden. Varje rektangel har omkretsen 40 cm.



Frågan

Vilken area har den stora kvadraten?

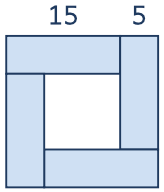
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Kvadraten

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

lång	kort	omkrets	stora sidan	area
15	5	40	20	400
12	8	40	20	400
18	2	40	20	400



15 + 5 = 20

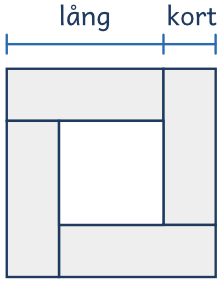
Så räknade vi första raden:

omkrets: 15 + 5 + 15 + 5 = 40

stora sidan: 15 + 5 = 20

area: 20 · 20 = 400 cm² ✓

Lösning B



stora sidan = lång + kort

Omkretsen är 2 långa och 2 korta: 40 cm

↓

lång + kort = 40 / 2 = 20 cm

↓

stora sidan är 20 cm

↓

arean: 20 · 20 = 400 cm²

Kontroll med 15 och 5: 15 + 5 + 15 + 5 = 40 och 15 + 5 = 20 ✓

Frågor att prata om

1. Vad prövar eleven i lösning A, och vad händer med den stora kvadratens sida?
2. Varför delar eleven i lösning B omkretsen med 2?
3. Var syns det i båda lösningarna att den stora kvadratens sida är 20 cm?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om omkretsen var 46 cm, och varför?

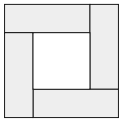
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

LÖSNINGSFÖRSLAG · GEOMETRI

KVADRATEN

PROBLEMET

Fyra likadana rektanglar ligger runt en liten kvadrat. Rektanglarna och den lilla kvadraten bildar tillsammans en stor kvadrat, som på bilden. Varje rektangel har omkretsen 40 cm.



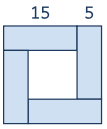
Vilken area har den stora kvadraten?

Svaret: 400 cm², vilken rektangel det än är.
Kontroll: 15 + 5 + 15 + 5 = 40, och 4 · 15 · 5 + 10 · 10 = 400 = 20 · 20.

IDÉN: *Den stora kvadratens sida är en lång och en kort sida, alltså halva omkretsen.*

LÖSNING A: OLIKA REKTANGLAR

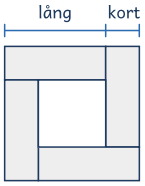
lång	kort	omkrets	stora sidan	area
15	5	40	20	400
12	8	40	20	400
18	2	40	20	400



Så räknade vi första raden:
omkrets: 15 + 5 + 15 + 5 = 40
stora sidan: 15 + 5 = 20
area: 20 · 20 = 400 cm² ✓

Eleven prövar rektanglar med omkretsen 40 cm och ser att den stora kvadratens sida blir 20 varje gång.

LÖSNING B: HALVA OMKRETSEN



Omkretsen är 2 långa och 2 korta: 40 cm
↓
lång + kort = 40 / 2 = 20 cm
↓
stora sidan är 20 cm
↓
arean: 20 · 20 = 400 cm²

Kontroll med 15 och 5: 15 + 5 + 15 + 5 = 40 och 15 + 5 = 20 ✓

Eleven ser att den stora kvadratens sida, en lång och en kort, är halva omkretsen.

LÖSNING C: TANKEVURPA

15 + 5 + 15 + 5 = 40
15 · 5 = 75
4 · 75 = 300
Svar: 300 cm².

Eleven räknar bara rektanglarna. Den lilla kvadraten i mitten är 10 · 10 = 100 cm² till.
Fråga: ”Vilken del av bilden har eleven inte räknat?”

FRÅGOR OM TANKARNA BAKOM

1. Vad prövar eleven i lösning A, och vad händer med den stora kvadratens sida?
2. Varför delar eleven i lösning B omkretsen med 2?
3. Var syns det i båda lösningarna att den stora kvadratens sida är 20 cm?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om omkretsen var 46 cm, och varför?

VISA OCH JÄMFÖR LÖSNINGAR

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Nämnaren 2014:4, Problemavdelningen nr 4123.

Lärarens sida: Avancerat, problem 8, De lutande kvadraterna

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

På prickpapper går det att rita kvadrater som lutar. Kvadratens sida på bilden går 2 steg åt höger och 1 steg uppåt. Ni räknar arean i rutor, och en ruta är den minsta kvadraten mellan fyra prickar.

Vilken area har kvadraten på bilden?

Vilken area har en kvadrat vars sida går 3 steg åt höger och 2 steg uppåt? Finns det en regel?

Problemet leder från area på prickpapper till Pythagoras sats. En kvadrat vars sida går a steg åt höger och b steg uppåt har arean $a^2 + b^2$. Kvadraten med 2 och 1 steg har arean 5, och den med 3 och 2 steg har 13. Eleverna ramar in, räknar och generaliserar. Material: prickpapper och linjal. Idén kommer ur nrich, Tilted Squares.

Lösning A



2 och 1 steg

ram: 3 · 3 = 9
en triangel: 2 · 1 / 2 = 1
fyra trianglar: 4 · 1 = 4
9 − 4 = 5 rutor



3 och 2 steg

ram: 5 · 5 = 25
en triangel: 3 · 2 / 2 = 3
fyra trianglar: 4 · 3 = 12
25 − 12 = 13 rutor ✓

Lösning B

a: åt höger	b: uppåt	area	$a^2 + b^2$
1	1	2	1 + 1
2	1	5	4 + 1
3	1	10	9 + 1
2	2	8	4 + 4
3	2	13	9 + 4



1 + 4 · 1 = 5

fyra trianglar
och en liten kvadrat

arean = $a^2 + b^2$ 3 och 2: $3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$

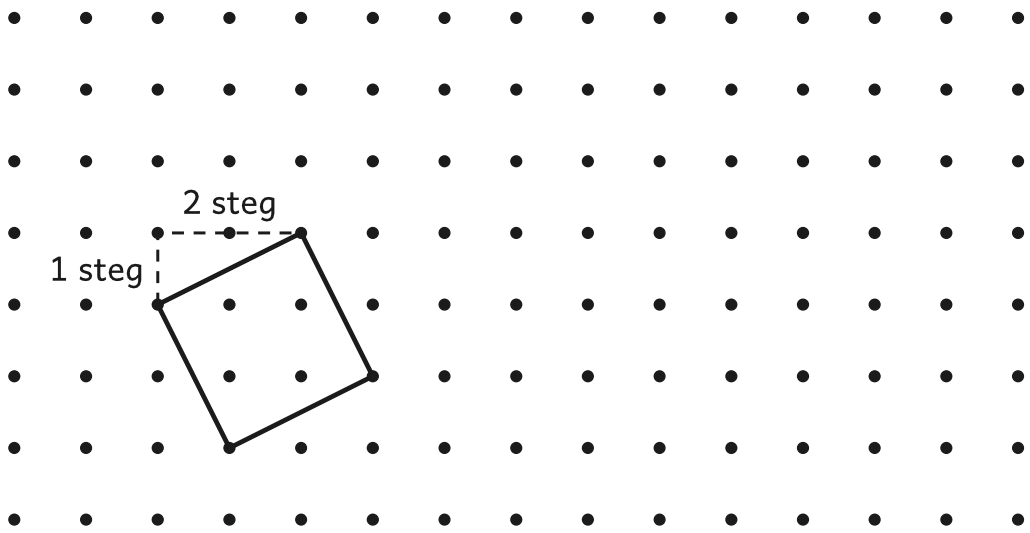
Kontroll: $2^2 + 1^2 = 5$, som rutorna ✓

I passet	
Ringa in	Frågorna, stegen 2 och 1 i bilden och 3 och 2 i frågan, och orden lutar, area och ruta.
Lyft ut	Vi vet: hur kvadratens sida går, 2 steg åt höger och 1 upp, och vad en ruta är. Vi ska ta reda på: arean, och en regel för den.
Ord och tal	Följ en sida i bilden, 2 steg åt höger och 1 upp. Fråga: Är kvadratens sida 3 steg lång? Vad mäter ni arean i?
Förutse	Hela rutor och delar av rutor som sätts ihop, en ram runt kvadraten, eller en tabell. Några tror att arean är 3 · 3 = 9.
Kör de fast	Föreslå: Rita in rutorna. Vilka delar av rutor kan ni sätta ihop till hela? Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att en hel ruta ligger i mitten. Försök använda det!
Säg inte	Rita en kvadrat runt den som lutar och ta bort trianglarna i hörnen. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Sidan går 1 steg åt höger och 1 uppåt (2 rutor). Större: Vilka areor kan en kvadrat på prickpapper ha? ($a^2 + b^2$, som 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10 och 13) Går det att rita en med arean 3? (Nej)
Jämför	Arean räknas genom att dela upp kvadraten, eller ramen runt den. A ger 25 − 12 = 13, och B ser $a^2 + b^2$ i tabellen. Lyft fram Pythagoras sats.
Fel eller osäker	Ni säger att arean är 9 rutor. Hur kan ni kontrollera att det stämmer med bilden? *”Är regeln rätt?”* Hur kan ni pröva den på en ny kvadrat?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

De lutande kvadraterna

På prickpapper går det att rita kvadrater som lutar. Kvadratens sida på bilden går 2 steg åt höger och 1 steg uppåt. Ni räknar arean i rutor, och en ruta är den minsta kvadraten mellan fyra prickar.



Frågorna

1. Vilken area har kvadraten på bilden?
2. Vilken area har en kvadrat vars sida går 3 steg åt höger och 2 steg uppåt? Finns det en regel?

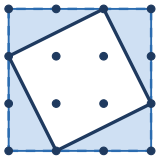
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

De lutande kvadraterna

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

2 och 1 steg

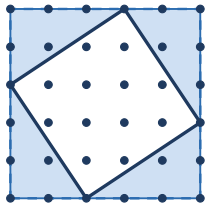


ram: $3 \cdot 3 = 9$

en triangel: $2 \cdot 1 / 2 = 1$

fyra trianglar: $4 \cdot 1 = 4$

$9 - 4 = 5$ rutor



3 och 2 steg

ram: $5 \cdot 5 = 25$

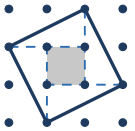
en triangel: $3 \cdot 2 / 2 = 3$

fyra trianglar: $4 \cdot 3 = 12$

$25 - 12 = 13$ rutor ✓

Lösning B

a: åt höger	b: uppåt	area	$a^2 + b^2$
1	1	2	1 + 1
2	1	5	4 + 1
3	1	10	9 + 1
2	2	8	4 + 4
3	2	13	9 + 4



$1 + 4 \cdot 1 = 5$

fyra trianglar
och en liten kvadrat

arean = $a^2 + b^2$

3 och 2: $3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$

Kontroll: $2^2 + 1^2 = 5$, som rutorna ✓

Frågor att prata om

1. Vad gör eleven i lösning A med ramen och trianglarna?
2. Hur ser eleven i lösning B regeln i tabellen?
3. Var syns det i båda lösningarna att kvadraten med 3 och 2 steg har arean 13?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 7 och 4 steg, och varför?

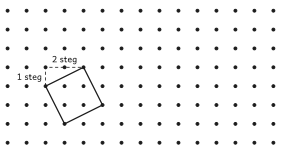
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Lösningsförslag · Geometri

De lutande kvadraterna

Problemet

På prickpapper går det att rita kvadrater som lutar. Kvadratens sida på bilden går 2 steg åt höger och 1 steg uppåt. Ni räknar arean i rutor, och en ruta är den minsta kvadraten mellan fyra prickar.



Vilken area har kvadraten på bilden?

Vilken area har en kvadrat vars sida går 3 steg åt höger och 2 steg uppåt?

Finns det en regel?

Svaret: 5 rutor. Med 3 och 2 steg blir det 13, och arean är $a^2 + b^2$.
Kontroll: $3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 1 / 2 = 5$ och $5 \cdot 5 - 4 \cdot 3 \cdot 2 / 2 = 13 = 3^2 + 2^2$.

Idén: *Arean räknas i rutor genom att dela den lutande kvadraten, eller ramen runt den, i trianglar och kvadrater.*

Lösning A: en ram



ram: $3 \cdot 3 = 9$
en triangel: $2 \cdot 1 / 2 = 1$
fyra trianglar: $4 \cdot 1 = 4$
$9 - 4 = 5$ rutor



ram: $5 \cdot 5 = 25$
en triangel: $3 \cdot 2 / 2 = 3$
fyra trianglar: $4 \cdot 3 = 12$
$25 - 12 = 13$ rutor ✓

Eleven ritar en kvadrat runt den som lutar och tar bort de fyra trianglarna i hörnen.

Lösning B: dela upp kvadraterna

a: åt höger	b: uppåt	area	$a^2 + b^2$
1	1	2	1 + 1
2	1	5	4 + 1
3	1	10	9 + 1
2	2	8	4 + 4
3	2	13	9 + 4



$1 + 4 \cdot 1 = 5$

fyra trianglar och en liten kvadrat

arean = $a^2 + b^2$ 3 och 2: $3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$
Kontroll: $2^2 + 1^2 = 5$, som rutorna ✓

Eleven delar kvadraterna i fyra trianglar och en liten kvadrat, för in areorna i en tabell och ser $a^2 + b^2$.

Lösning C: tankevurpa

Sidan: $2 + 1 = 3$ steg

$3 \cdot 3 = 9$

Svar: 9 rutor.

Sidan lutar och är kortare än 3 steg. $3 \cdot 3 = 9$ är ramen runt kvadraten, med trianglarna i hörnen.

Fråga: ”Vad räknar $3 \cdot 3 = 9$ på bilden?”

Frågor om tankarna bakom

1. Vad gör eleven i lösning A med ramen och trianglarna?
2. Hur ser eleven i lösning B regeln i tabellen?
3. Var syns det i båda lösningarna att kvadraten med 3 och 2 steg har arean 13?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 7 och 4 steg, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur nrich, Tilted Squares.

Lärarens sida: Avancerat, problem 9, Staketet

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

Ni har 60 m staket till en rektangulär hage för getter. Hagen ska bli så stor som möjligt. Sedan bygger ni hagen mot en lång vägg i stället, så att väggen blir en sida och staketet räcker till de tre andra.

Vilka mått ger den största hagen med staket runt om, och hur stor blir den?

Vilka mått ger den största hagen mot väggen, och hur stor blir den?

Problemet handlar om största arean med 60 m staket. Hagen blir störst som en kvadrat, 15 · 15 = 225 m², och mot en vägg 15 · 30 = 450 m². Eleverna ritar, gör en tabell och ser arean som en funktion. Material: rutat papper och ett snöre på 60 cm. Idén kommer ur Problembanken åk 7–9, problem 9.

Lösning A

fyra sidor

bredd	längd	area
5	25	125
10	20	200
14	16	224
15	15	225
16	14	224

störst: 15 · 15 = 225 m²

Kontroll: 15 + 15 + 15 + 15 = 60

mot väggen

bredd	längd	area
12	36	432
14	32	448
15	30	450
16	28	448
18	24	432

störst: 15 · 30 = 450 m²

Kontroll: 15 + 30 + 15 = 60 ✓

Lösning B

fyra sidor:

Arean = b · (30 − b)

lika stor för b och 30 − b,
så toppen är mitt emellan:

15 · 15 = 225 m²

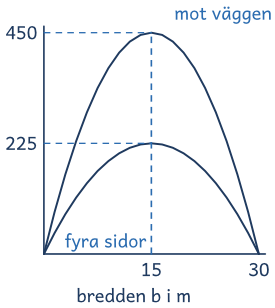
14 · 16 = 224 och 13 · 17 = 221

mot väggen:

Arean = b · (60 − 2b)
= 2 · b · (30 − b)

toppen i 15: 15 · 30 = 450 m²

Kontroll: 15 + 30 + 15 = 60 ✓

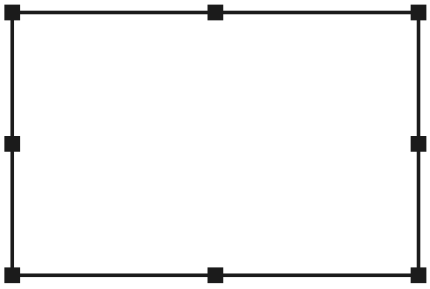


I passet	
Ringa in	Frågorna, talet 60, och orden rektangulär, *”så stor som möjligt”*, vägg och *”de tre andra”*.
Lyft ut	Vi vet: 60 m staket, en rektangel, och sedan en vägg som en sida. Vi ska ta reda på: måtten som ger störst area, båda gångerna.
Ord och tal	Peka på väggen i bilden. Fråga: Vad mäter 60 m, omkretsen eller arean? Är det omkretsen också mot väggen? Vad betyder *”så stor som möjligt”*?
Förutse	Hagar som ritas på rutat papper, en tabell med sidorna, eller en formel och en graf. Mot väggen tror många att kvadraten är bäst igen.
Kör de fast	Föreslå: Rita några hagar med 60 m staket och räkna arean. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att 10 och 20 m gav 200 m², och 12 och 18 gav mer. Försök använda det!
Säg inte	Kvadraten är störst, och mot väggen blir längden dubbelt så stor som bredden. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Pröva samma problem med 20 m staket, i hela meter (5 · 5 = 25 m², och mot väggen 5 · 10 = 50 m²). Större: Hagen ska ligga i ett hörn, med två väggar som sidor. Hur stor kan den bli nu? (30 och 30 m, 900 m²)
Jämför	Arean blir störst i mitten, där talen i tabellen vänder. I A syns det när bredden 14 och 16 ger samma area, och i B i grafens topp, mitt emellan b och 30 − b.
Fel eller osäker	Ni säger att en kvadrat med sidan 20 m är bäst mot väggen. Hur kan ni kontrollera att det stämmer med problemet? *”Är 15 m svaret?”* Vilka är måtten, och hur stor blir hagen?

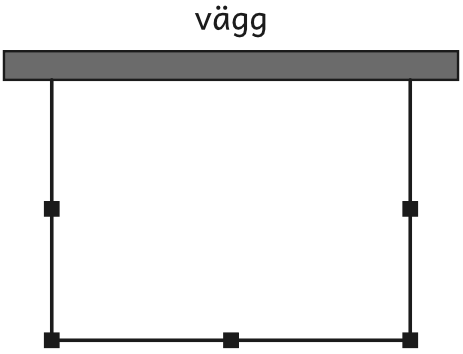
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Staketet

Ni har 60 m staket till en rektangulär hage för getter. Hagen ska bli så stor som möjligt. Sedan bygger ni hagen mot en lång vägg i stället, så att väggen blir en sida och staketet räcker till de tre andra.



staket runt om



staket på tre sidor

Frågorna

1. Vilka mått ger den största hagen med staket runt om, och hur stor blir den?
2. Vilka mått ger den största hagen mot väggen, och hur stor blir den?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Staketet

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

fyra sidor

bredd	längd	area
5	25	125
10	20	200
14	16	224
15	15	225
16	14	224

störst: $15 \cdot 15 = 225$ m^2

Kontroll: $15 + 15 + 15 + 15 = 60$

mot väggen

bredd	längd	area
12	36	432
14	32	448
15	30	450
16	28	448
18	24	432

störst: $15 \cdot 30 = 450$ m^2

Kontroll: $15 + 30 + 15 = 60$ ✓

Lösning B

fyra sidor:

Arean = $b \cdot (30 - b)$

lika stor för b och 30 − b,
så toppen är mitt emellan:

$15 \cdot 15 = 225$ m^2

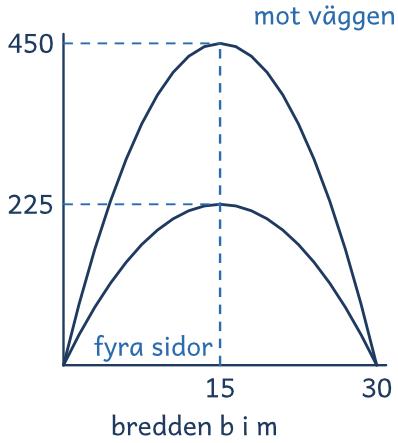
$14 \cdot 16 = 224$ och $13 \cdot 17 = 221$

mot väggen:

Arean = $b \cdot (60 - 2b)$
$= 2 \cdot b \cdot (30 - b)$

toppen i 15: $15 \cdot 30 = 450$ m^2

Kontroll: $15 + 30 + 15 = 60$ ✓



Frågor att prata om

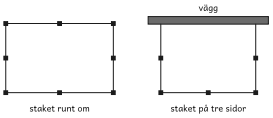
1. Vad gör eleven i lösning A, och hur vet eleven att 15 är bäst?
2. Varför är arean mot väggen dubbelt så stor som runt om i lösning B?
3. Var syns det i båda lösningarna att arean är störst när bredden är 15 m?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 50 m staket, och varför?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Staketet

Problemet

Ni har 60 m staket till en rektangulär hage för getter. Hagen ska bli så stor som möjligt. Sedan bygger ni hagen mot en lång vägg i stället, så att väggen blir en sida och staketet räcker till de tre andra.



Vilka mått ger den största hagen med staket runt om, och hur stor blir den?

Vilka mått ger den största hagen mot väggen, och hur stor blir den?

Svaret: Runt om 15 · 15 = 225 m². Mot väggen 15 · 30 = 450 m², 30 längs väggen.
Kontroll: Staketet: 4 · 15 = 60, och mot väggen 2 · 15 + 30 = 60.

Idén: *Arean blir störst i mitten, där talen i tabellen vänder.*

Lösning A: pröva olika bredder

fyra sidor

bredd	längd	area
5	25	125
10	20	200
14	16	224
15	15	225
16	14	224

störst: 15 · 15 = 225 m²
Kontroll: 15 + 15 + 15 + 15 = 60

mot väggen

bredd	längd	area
12	36	432
14	32	448
15	30	450
16	28	448
18	24	432

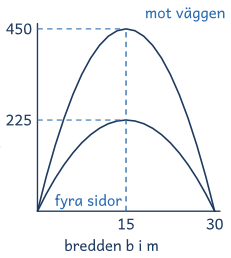
störst: 15 · 30 = 450 m²
Kontroll: 15 + 30 + 15 = 60 ✓

Eleven prövar bredder i två tabeller och ser att arean minskar på båda sidor om 15 m.

Lösning B: uttryck och graf

fyra sidor:
Arean = b · (30 − b)
lika stor för b och 30 − b,
så toppen är mitt emellan:
15 · 15 = 225 m²
14 · 16 = 224 och 13 · 17 = 221

mot väggen:
Arean = b · (60 − 2b)
= 2 · b · (30 − b)
toppen i 15: 15 · 30 = 450 m²
Kontroll: 15 + 30 + 15 = 60 ✓



Eleven skriver arean som b · (30 − b) och ser i grafen att den är störst vid 15.

Lösning C: tankevurpa

Runt om: 15 · 15 = 225

Mot väggen: 20 + 20 + 20 = 60

20 · 20 = 400

Svar: 225 m² och 400 m².

Runt om stämmer, men kvadraten är inte störst mot väggen: 15 · 30 = 450 m² är mer.
Fråga: ”Hur kan ni pröva om 20 och 20 m är bäst?”

Frågor om tankarna bakom

1. Vad gör eleven i lösning A, och hur vet eleven att 15 är bäst?
2. Varför är arean mot väggen dubbelt så stor som runt om i lösning B?
3. Var syns det i båda lösningarna att arean är störst när bredden är 15 m?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 50 m staket, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Lärarens sida: Avancerat, problem 10, Alla summor

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

Talet 3 kan skrivas som en summa av positiva heltal på fyra sätt, när ordningen räknas: 3, 2 + 1, 1 + 2 och 1 + 1 + 1. Talet själv räknas också som ett sätt.

På hur många sätt kan talen 4 och 5 skrivas så?

På hur många sätt kan 10 skrivas så? Förklara hur ni vet.

Problemet handlar om kombinatorik och leder till potenser. Talet 4 kan skrivas som en summa på 8 sätt, 5 på 16 och 10 på 512, när ordningen räknas. Antalet fördubblas, och talet n ger 2 upphöjt till (n − 1). Eleverna listar systematiskt och förklarar mönstret med klossar. Material: tio klossar eller kuber. Idén kommer ur Problembanken åk 7–9, problem 15.

Lösning A

1 tal: 4

2 tal: 3 + 1 1 + 3 2 + 2

3 tal: 2 + 1 + 1 1 + 2 + 1 1 + 1 + 2

4 tal: 1 + 1 + 1 + 1

1 + 3 + 3 + 1 = 8 sätt ✓

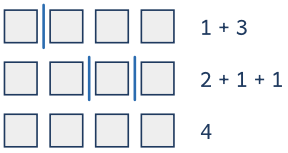
tal	sätt
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16

Antalet fördubblas för varje tal:

10: 16 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 = 512 sätt

Lösning B

4 klossar, 3 luckor:



1 + 3

2 + 1 + 1

4

Varje lucka: avdelare eller inte, alltså 2 val

↓

2 · 2 · 2 = 8 sätt

10 klossar har 9 luckor:

2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 = 512 sätt

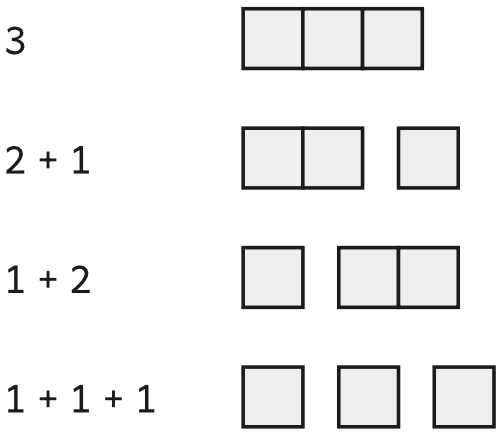
Kontroll: 3 har 2 luckor, 2 · 2 = 4 sätt ✓

I passet	
Ringa in	Frågorna, talen 4, 5 och 10, och orden summa, *”positiva heltal”* och *”ordningen räknas”*.
Lyft ut	Vi vet: 3 kan skrivas på fyra sätt, och 2 + 1 och 1 + 2 är olika. Vi ska ta reda på: antalet sätt för 4, 5 och 10.
Ord och tal	Fråga: Vad är ett positivt heltal? Varför är 2 + 1 och 1 + 2 två sätt? Räknas 0 + 3?
Förutse	En lista ordnad efter första talet eller efter antalet tal, klossar eller ett mönster. Många missar sätt när de listar utan ordning.
Kör de fast	Föreslå: Skriv alla sätt för 4 och ordna listan. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att talen 1, 2, 3 och 4 kan skrivas på 1, 2, 4 och 8 sätt. Försök använda det!
Säg inte	Varje lucka mellan klossarna får en avdelare eller inte. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Ta talen 1 och 2 först och sedan 4 (1, 2 och 8 sätt). Större: Om ordningen inte räknas, är 2 + 1 och 1 + 2 samma sätt. Hur många sätt finns det då för 4 och 5? (5 och 7 sätt)
Jämför	Antalet fördubblas när talet ökar med 1. I A syns det i tabellen, och i B ger varje ny lucka två val, 2 · 2 · 2 = 8 för 4.
Fel eller osäker	Ni säger att 4 kan skrivas på 5 sätt. Hur kan ni kontrollera att det stämmer med problemet? Hur vet ni att ni har alla sätt?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Alla summor

Talet 3 kan skrivas som en summa av positiva heltal på fyra sätt, när ordningen räknas: 3, 2 + 1, 1 + 2 och 1 + 1 + 1. Talet själv räknas också som ett sätt.



Frågorna

1. På hur många sätt kan talen 4 och 5 skrivas så?
2. På hur många sätt kan 10 skrivas så? Förklara hur ni vet.

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Alla summor

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

1 tal: 4

2 tal: 3 + 1 1 + 3 2 + 2

3 tal: 2 + 1 + 1 1 + 2 + 1 1 + 1 + 2

4 tal: 1 + 1 + 1 + 1

1 + 3 + 3 + 1 = 8 sätt ✓

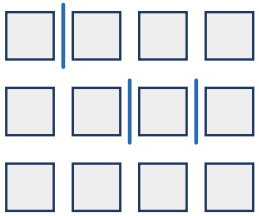
tal	sätt
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16

Antalet fördubblas för varje tal:

10: 16 · 2 · 2 · 2 · 2 = 512 sätt

Lösning B

4 klossar, 3 luckor:



1 + 3

2 + 1 + 1

4

Varje lucka:
avdelare eller inte,
alltså 2 val
↓
2 · 2 · 2 = 8 sätt

10 klossar har 9 luckor:

2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 = 512 sätt

Kontroll: 3 har 2 luckor, 2 · 2 = 4 sätt ✓

Frågor att prata om

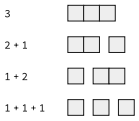
1. Hur ordnar eleven listan i lösning A så att inget sätt fattas?
2. Varför ger varje lucka två val i lösning B?
3. Var syns det i båda lösningarna att antalet fördubblas?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja för talet 20, och varför?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Alla summor

Problemet

Talet 3 kan skrivas som en summa av positiva heltal på fyra sätt, när ordningen räknas: 3, 2 + 1, 1 + 2 och 1 + 1 + 1. Talet själv räknas också som ett sätt.



På hur många sätt kan talen 4 och 5 skrivas så?

På hur många sätt kan 10 skrivas så? Förklara hur ni vet.

Svaret: 4 på 8 sätt, 5 på 16 och 10 på 512, eftersom antalet fördubblas.
Kontroll: 1 + 3 + 3 + 1 = 8 och 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16, och 16 · 32 = 512.

Idén: *Antalet sätt fördubblas när talet ökar med 1.*

Lösning A: ordna efter antalet tal

1 tal: 4
2 tal: 3 + 1 1 + 3 2 + 2
3 tal: 2 + 1 + 1 1 + 2 + 1 1 + 1 + 2
4 tal: 1 + 1 + 1 + 1
1 + 3 + 3 + 1 = 8 sätt ✓

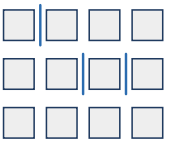
tal	sätt
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16

Antalet fördubblas för varje tal:
10: 16 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 = 512 sätt

Eleven listar sätten ordnade efter hur många tal summan har och ser att antalet fördubblas.

Lösning B: klossar på rad

4 klossar, 3 luckor:



1 + 3
2 + 1 + 1
4

Varje lucka: avdelare eller inte, alltså 2 val
↓
2 · 2 · 2 = 8 sätt

10 klossar har 9 luckor:
2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 = 512 sätt
Kontroll: 3 har 2 luckor, 2 · 2 = 4 sätt ✓

Eleven lägger klossar på rad och ser att varje lucka mellan dem får en avdelare eller inte.

Lösning C: tankevurpa

4, 3 + 1, 2 + 2
2 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1
Svar: 4 kan skrivas på 5 sätt.

Ordningen räknas, så 1 + 3, 1 + 2 + 1 och 1 + 1 + 2 saknas: 5 + 3 = 8.
Fråga: ”Hur visar problemet att ordningen räknas?”

Frågor om tankarna bakom

1. Hur ordnar eleven listan i lösning A så att inget sätt fattas?
2. Varför ger varje lucka två val i lösning B?
3. Var syns det i båda lösningarna att antalet fördubblas?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja för talet 20, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Problembanken åk 7–9, problem 15.