Lärarens sidor: Medel

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Här står problemen på nivån Medel, som ligger nära åk 6–7, i den ordning gruppen tar dem. Varje problem har lärarens sida, problemets sida, bladet Två lösningar och ett lösningsförslag.

Problemet	Matematiken	Lösning A	Lösning B
1. Glasspinnarna	trianglar, och att hitta alla	Rita eller bygg: lägg och sortera trianglar	Gör en lista efter benen
2. Borden	mönster och uttryck	Gör en tabell: 4 platser till per bord	Skriv ett uttryck: 4 per bord och ändarna
3. Kulpåsarna	chans som andel	andelen blå i varje påse	röda på varje blå
4. Bollbytet	proportionalitet, flera svar	Gör en tabell: golfbollar som byts mot tennisbollar	Tänk dig att alla är av samma sort: byt allt mot pingis först
5. Tangrammet	area och bråk	Rita eller bygg: lägg bitarna på varandra	Rita eller bygg: 16 små trianglar
6. Skolan	bråk, procent och delbarhet	Pröva och förbättra i en tabell	delbart med 3 och med 5, alltså med 15
7. Samlarbilderna	medelvärde, median och typvärde	Pröva och förbättra: fem tal i ordning	börja med de tal som måste stå
8. Klädaffären	likheter och byten	räkna allt i kepsar	välj ett pris på en keps
9. Pantpengarna	bråk av det som är kvar	Räkna baklänges med staplar	Pröva och förbättra i en tabell
10. Smörgåsarna	bråk och rättvis delning	Rita eller bygg: smörgåsar i tredjedelar	räkna med bråk

Så använder du problemen	
Ordningen	Ta problemen i ordning, ett per pass, och byt ordning när gruppen behöver arbeta med ett annat område eller ett problem som liknar det förra. De första är lättast att börja på.
Kopiorna	Kopiera problemets sida till varje par, eller visa den på tavlan. I Jämföra får varje par bladet Två lösningar, med B under ett papper tills gruppen har sagt vad A gör.

© Niclas Fohlin. Ur Problemlösning i grupp, https://niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp.

Lärarens sida: Medel, problem 1, Glasspinnarna

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

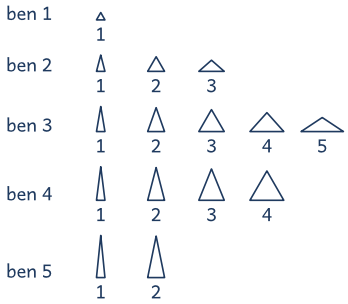
Lisa har 12 glasspinnar som är lika långa. Hon lägger likbenta trianglar på bordet, en i taget, och behöver inte använda alla pinnar. Varje sida är en eller flera hela pinnar. En liksidig triangel räknas också som likbent. Trianglar med samma form men olika storlek räknas som olika.

Hur många olika likbenta trianglar kan Lisa lägga?

Hur kan ni vara säkra på att ni har hittat alla?

Problemet handlar om trianglar och om att veta att man har hittat alla. Svaret är 15 likbenta trianglar, och fyra av dem är liksidiga. Eleverna prövar när tre sidor går ihop till en triangel och ordnar sina trianglar så att ingen saknas eller räknas två gånger. Material: glasspinnar, 12 per par. Idén kommer ur Nämnaren 2025:4, problem 4490.

Lösning A



Gick inte:
2, 2, 4
blev platt

5, 5, 3
5 + 5 + 3 = 13
för många

1 + 3 + 5 + 4 + 2 = 15 ✓

Lösning B

Basen är kortare än benen tillsammans.
Alla pinnar ihop: högst 12.

ben	basen kan vara	antal
1	1	1
2	1, 2, 3	3
3	1, 2, 3, 4, 5	5
4	1, 2, 3, 4	4
5	1, 2	2
6	ingen	0

→ Ben 4:
4 + 4 = 8
12 − 8 = 4
basen högst 4

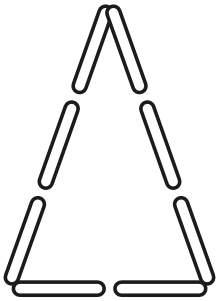
1 + 3 + 5 + 4 + 2 = 15 ✓

I passet	
Ringa in	Frågorna, talet 12, och orden likbent, liksidig, *”hela pinnar”* och olika.
Lyft ut	Vi vet: 12 lika långa pinnar, minst två sidor lika långa, hela pinnar. Vi ska ta reda på: hur många olika trianglar, och hur vi vet att vi har alla.
Ord och tal	Reda ut likbent, ben och bas med bilden, och visa den som inte går ihop. Fråga: Vad räknar 12? Är 3, 3, 2 och 2, 3, 3 olika?
Förutse	Paren lägger och ritar pinnar, gör en lista utan ordning eller en tabell efter benen. Någon räknar med platta trianglar, som 2, 2, 4.
Kör de fast	Föreslå: Lägg en triangel och skriv upp sidorna. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att 2, 2, 4 blev platt. Försök använda det!
Säg inte	Gå igenom benen från 1 till 5, och låt basen vara kortare än benen tillsammans. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Högst 6 pinnar (3 trianglar). Större: Hur många trianglar går med högst 12 pinnar, om sidorna får vara olika långa? (18, de 15 likbenta och 3 till) Hur många likbenta går med högst 20 pinnar? (45)
Jämför	Basen är kortare än benen tillsammans, och pinnarna är högst 12. A hittar villkoren genom att bygga, och B skriver dem som en regel. Ordningen efter benen visar att ingen saknas.
Fel eller osäker	Ni säger att 3, 3, 2 och 2, 3, 3 är två trianglar. Hur kan ni kontrollera det med pinnarna? *”Är det alla nu?”* Hur kan ni kontrollera att ingen saknas?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Glasspinnarna

Lisa har 12 glasspinnar som är lika långa. Hon lägger likbenta trianglar på bordet, en i taget, och behöver inte använda alla pinnar. Varje sida är en eller flera hela pinnar. En liksidig triangel räknas också som likbent. Trianglar med samma form men olika storlek räknas som olika.



en likbent triangel



går inte ihop

Frågorna

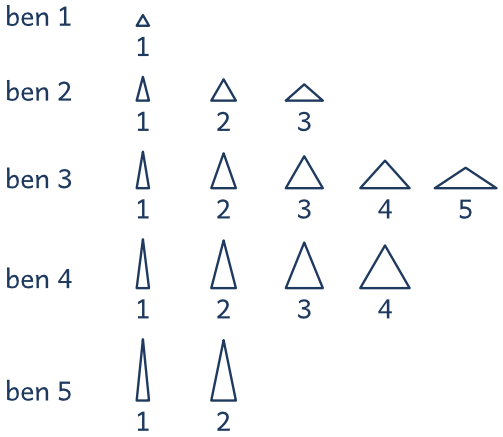
1. Hur många olika likbenta trianglar kan Lisa lägga?
2. Hur kan ni vara säkra på att ni har hittat alla?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Glasspinnarna

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A



Gick inte:

2, 2, 4
blev platt

5, 5, 3
5 + 5 + 3 = 13
för många

1 + 3 + 5 + 4 + 2 = 15 ✓

Lösning B

Basen är kortare än benen tillsammans.
Alla pinnar ihop: högst 12.

ben	basen kan vara	antal
1	1	1
2	1, 2, 3	3
3	1, 2, 3, 4, 5	5
4	1, 2, 3, 4	4
5	1, 2	2
6	ingen	0

→ Ben 4:
4 + 4 = 8
12 − 8 = 4
basen högst 4

1 + 3 + 5 + 4 + 2 = 15 ✓

Frågor att prata om

1. Hur sorterar eleven trianglarna i lösning A?
2. Varför skriver eleven i lösning B att basen är högst 4 när benen är 4?
3. Var syns det i båda lösningarna att basen måste vara kortare än benen tillsammans?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 30 pinnar, och varför?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Lösningsförslag · Geometri

Glasspinnarna

Problemet

Lisa har 12 glasspinnar som är lika långa. Hon lägger likbenta trianglar på bordet, en i taget, och behöver inte använda alla pinnar. Varje sida är en eller flera hela pinnar. En liksidig triangel räknas också som likbent. Trianglar med samma form men olika storlek räknas som olika.



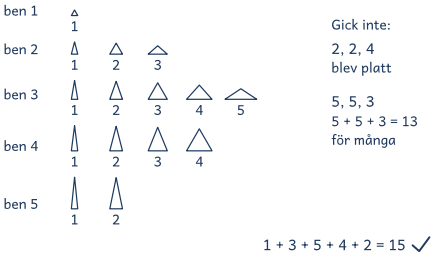
Hur många olika likbenta trianglar kan Lisa lägga?

Hur kan ni vara säkra på att ni har hittat alla?

Svaret: 15 likbenta trianglar, varav fyra liksidiga. En lista efter benen visar att ingen saknas.
Kontroll: Benen 1 till 5 ger 1 + 3 + 5 + 4 + 2 = 15, och ben 6 ger ingen bas.

Idén: *Basen är kortare än benen tillsammans, och pinnarna är högst 12.*

Lösning A: bygga och sortera



Eleven lägger trianglar, ritar dem som går ihop och sorterar dem efter benen från 1 till 5.

Lösning B: en lista efter benen

Basen är kortare än benen tillsammans.
Alla pinnar ihop: högst 12.

ben	basen kan vara	antal
1	1	1
2	1, 2, 3	3
3	1, 2, 3, 4, 5	5
4	1, 2, 3, 4	4
5	1, 2	2
6	ingen	0

Ben 4:
→ 4 + 4 = 8
12 − 8 = 4
basen högst 4

1 + 3 + 5 + 4 + 2 = 15 ✓

Eleven skriver villkoren först och räknar för varje ben vilka baser som går.

Lösning C: tankevurpa

Ben 1: bas 1, 2. Ben 2: bas 1–4
Ben 3: bas 1–6. Ben 4: bas 1–4
Ben 5: bas 1, 2. Det blir 18.
Svar: 18 likbenta trianglar.

Eleven räknar med platta trianglar, som 3, 3, 6, där basen är lika lång som benen tillsammans.
Fråga: ”Hur ser 3, 3, 6 ut när ni lägger den?”

Frågor om tankarna bakom

1. Hur sorterar eleven trianglarna i lösning A?
2. Varför skriver eleven i lösning B att basen är högst 4 när benen är 4?
3. Var syns det i båda lösningarna att basen måste vara kortare än benen tillsammans?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 30 pinnar, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Nämnaren 2025:4, problem 4490.

Lärarens sida: Medel, problem 2, Borden

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

I matsalen står sexkantiga bord i en lång rad. Två bord som står bredvid varandra delar en sida. Vid varje fri sida får en person sitta.

Hur många personer får plats vid 10 bord?

Hitta en regel som gäller för alla antal bord.

Problemet handlar om ett mönster som växer lika mycket för varje bord. Vid 10 bord får 42 personer plats, och vid n bord 4 · n + 2. Eleverna ser mönstret i en tabell och i bilden och skriver en regel med ord eller med n. Idén kommer ur Nämnaren 2025:2, problem 4476.

Lösning A

bord	personer	
1	6	
2	10	+4
3	14	+4
4	18	+4
5	22	+4

Från 1 till 10 bord är 9 steg med +4:

$6 + 9 \cdot 4 = 42$ ✓

Regel: 6, och sedan 4 till för varje bord.

Lösning B



$4 + 4 + 4 + 2 = 14$

Varje bord: 4 platser, 2 uppe och 2 nere.

Ändarna: 1 + 1.

10 bord: $4 \cdot 10 + 2 = 42$ ✓

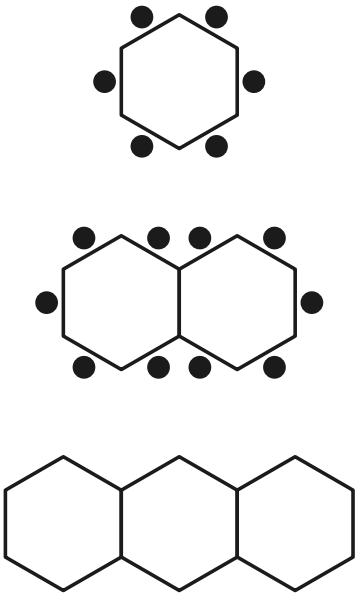
n bord: $4 \cdot n + 2$

I passet	
Ringa in	Frågorna, talet 10, och orden sexkantiga, *”delar en sida”* och *”fri sida”*.
Lyft ut	Vi vet: sexkantiga bord i rad, två bord delar en sida, en person vid varje fri sida. Vi ska ta reda på: hur många vid 10 bord, och en regel.
Ord och tal	Reda ut sexkantig och fri sida med bilden. Fråga: Vad räknar 10, och vad räknar prickarna?
Förutse	Paren ritar bord, gör en tabell med 6, 10 och 14 eller ser 4 vid varje bord. Någon räknar 10 · 6 = 60 eller glömmer ändarna.
Kör de fast	Föreslå: Rita platserna vid tre bord och räkna dem. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att det blir 4 fler för varje bord. Försök använda det!
Säg inte	Varje bord har fyra platser, och så kommer en i varje ände. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: 4 bord (18 personer). Större: Kan en rad bord ha exakt 100 platser? (Nej: 24 bord ger 98 och 25 bord 102) Hur många bord behövs för en klass med 27 elever? (7, eftersom 6 bord ger 26)
Jämför	Varje nytt bord ger fyra platser till, två uppe och två nere. I A syns det som +4 i tabellen, och i B som 4 vid varje bord.
Fel eller osäker	Ni säger att 10 bord ger dubbelt så många som 5 bord, alltså 44. Hur kan ni kontrollera det mot bilden? *”Stämmer regeln?”* Hur kan ni kontrollera den med 3 bord?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Borden

I matsalen står sexkantiga bord i en lång rad. Två bord som står bredvid varandra delar en sida. Vid varje fri sida får en person sitta.



Frågorna

1. Hur många personer får plats vid 10 bord?
2. Hitta en regel som gäller för alla antal bord.

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Borden

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

bord	personer	
1	6	
2	10	+4
3	14	+4
4	18	+4
5	22	+4

Från 1 till 10 bord är 9 steg med +4:

$6 + 9 \cdot 4 = 42$ ✓

Regel: 6, och sedan 4 till för varje bord.

Lösning B



Varje bord: 4 platser, 2 uppe och 2 nere.

Ändarna: 1 + 1.

$4 + 4 + 4 + 2 = 14$

10 bord: $4 \cdot 10 + 2 = 42$ ✓

n bord: $4 \cdot n + 2$

Frågor att prata om

1. Vad gör eleven i lösning A från rad till rad?
2. Varför lägger eleven i lösning B till 2 efter $4 \cdot 10$?
3. Var syns det i båda lösningarna att varje nytt bord ger fyra platser till?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja för 100 bord, och varför?

Till läraren · I passet: Dela ut bladet i Jämföra, när paren har prövat. Lärarens sida säger vad som är lika i lösningarna.

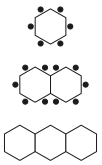
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

LÖSNINGSFÖRSLAG · ALGEBRA

BORDEN

PROBLEMET

I matsalen står sexkantiga bord i en lång rad. Två bord som står bredvid varandra delar en sida. Vid varje fri sida får en person sitta.



Hur många personer får plats vid 10 bord?

Hitta en regel som gäller för alla antal bord.

Svaret: 42 personer vid 10 bord, och 4 · n + 2 vid n bord.
Kontroll: 4 · 1 + 2 = 6 och 4 · 2 + 2 = 10 som i bilden, och 4 · 10 + 2 = 42.

IDÉN: *Varje nytt bord ger fyra platser till, två uppe och två nere.*

LÖSNING A: RÄKNA STEG OM 4

bord	personer	
1	6	
2	10	+4
3	14	+4
4	18	+4
5	22	+4

Från 1 till 10 bord är 9 steg med +4:

6 + 9 · 4 = 42 ✓

Regel: 6, och sedan 4 till för varje bord.

Eleven ser att det blir 4 personer till för varje bord och räknar 9 steg från 6.

LÖSNING B: RÄKNA PLATSERNA



Varje bord: 4 platser, 2 uppe och 2 nere.

Ändarna: 1 + 1.

4 + 4 + 4 + 2 = 14

10 bord: 4 · 10 + 2 = 42 ✓

n bord: 4 · n + 2

Eleven ser fyra platser vid varje bord och en plats i varje ände, och skriver 4 · n + 2.

LÖSNING C: TANKEVURPA

6, 10, 14, 18, 22

5 bord ger 22 personer.

10 bord: 2 · 22 = 44

Svar: 44 personer.

Två rader med 5 bord har fyra ändar, men en rad med 10 bord har två: 44 − 2 = 42.

Fråga: ”Hur kan ni kontrollera 44 med en ritning?”

FRÅGOR OM TANKARNA BAKOM

1. Vad gör eleven i lösning A från rad till rad?
2. Varför lägger eleven i lösning B till 2 efter 4 · 10?
3. Var syns det i båda lösningarna att varje nytt bord ger fyra platser till?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja för 100 bord, och varför?

VISA OCH JÄMFÖR LÖSNINGAR

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Nämnaren 2025:2, problem 4476.

Lärarens sida: Medel, problem 3, Kulpåsarna

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

I tre påsar finns röda och blå kulor. Påse A har 80 röda och 20 blå. Påse B har 30 röda och 10 blå. Påse C har 18 röda och 2 blå. Du tar en kula ur en påse utan att titta.

Vilken påse ger störst chans att få en blå kula, och varför?

Problemet handlar om chans som en andel av alla kulor. Svaret är påse B, där 1/4 av kulorna är blå. Eleverna jämför andelar som bråk eller procent, eller röda mot blå, och ser att flest blå eller färst röda inte ger störst chans. Idén kommer ur Problembanken åk 7–9, problem 11, Kulpåsen.

Lösning A

påse	blå	alla	andel blå
A	20	100	20 %
B	10	40	25 %
C	2	20	10 %

Så räknade vi påse B:
30 + 10 = 40
10 / 40 = 1/4
1/4 = 25/100
alltså 25 %

25 % är störst: påse B. ✓

Lösning B

Hur många röda på varje blå? ● blå ○ röd

A: 80 / 20 = 4 ●○○○○

B: 30 / 10 = 3 ●○○○

C: 18 / 2 = 9 ●○○○○○○○○○

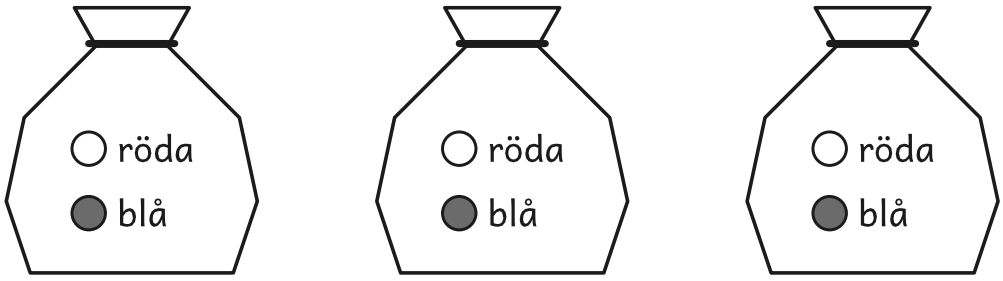
Färre röda på varje blå ger större chans.
Påse B är bäst. ✓

I passet	
Ringa in	Frågan, talen för varje påse, och orden chans och *”blå kula”*.
Lyft ut	Vi vet: hur många röda och blå kulor det finns i varje påse. Vi ska ta reda på: vilken påse som ger störst chans för blå, och varför.
Ord och tal	Visa bilden. Fråga: Vad betyder chans? Vad räknar 20 i påse A, och hur många kulor finns det i den?
Förutse	Bråk eller procent av alla kulor, röda mot blå, eller kulor som ritas. Några väljer påse A, som har flest blå, eller C, som har färst röda.
Kör de fast	Föreslå: Gör en tabell med det ni vet om varje påse. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att A har 100 kulor och 20 blå. Försök använda det!
Säg inte	Räkna hur stor del av alla kulor som är blå. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Påse A har 12 röda och 3 blå, påse B 6 och 2, och påse C 4 och 1 (påse B). Större: Hur många blå måste ni lägga i påse C för att den ska ge samma chans som påse B? (4, så att 6 av 24 är blå)
Jämför	Chansen beror på hur stor del av kulorna som är blå. A räknar andelen, och i B betyder 3 röda på varje blå att 1 av 4 är blå.
Fel eller osäker	Ni säger att påse A är bäst, för den har flest blå. Hur kan ni kontrollera det mot problemet? Ni säger att påse C är bäst, för den har färst röda. Hur kan ni kontrollera det mot problemet?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Kulpåsarna

I tre påsar finns röda och blå kulor. Påse A har 80 röda och 20 blå. Påse B har 30 röda och 10 blå. Påse C har 18 röda och 2 blå. Du tar en kula ur en påse utan att titta.



påse A påse B påse C

Frågan

Vilken påse ger störst chans att få en blå kula, och varför?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Kulpåsarna

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

påse	blå	alla	andel blå
A	20	100	20 %
B	10	40	25 %
C	2	20	10 %

Så räknade vi påse B:

30 + 10 = 40

10 / 40 = 1/4

1/4 = 25/100

alltså 25 %

25 % är störst: påse B. ✓

Lösning B

Hur många röda på varje blå? ● blå ○ röd

A: 80 / 20 = 4 ●○○○○

B: 30 / 10 = 3 ●○○○

C: 18 / 2 = 9 ●○○○○○○○○○

Färre röda på varje blå ger större chans.

Påse B är bäst. ✓

Frågor att prata om

1. Vad räknar eleven ut för varje påse i lösning A?
2. Varför delar eleven i lösning B de röda med de blå?
3. Var syns det i båda lösningarna att påse B är bäst, fast påse A har fler blå?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om talen inte gick att dela jämnt, och varför?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Kulpåsarna

Problemet

I tre påsar finns röda och blå kulor. Påse A har 80 röda och 20 blå. Påse B har 30 röda och 10 blå. Påse C har 18 röda och 2 blå. Du tar en kula ur en påse utan att titta.



Vilken påse ger störst chans att få en blå kula, och varför?

Svaret: Påse B, där 1/4 av kulorna är blå.
Kontroll: 20 / 100 = 1/5, 10 / 40 = 1/4 och 2 / 20 = 1/10, och 1/4 är störst.

Idén: *Chansen beror på hur stor del av kulorna i påsen som är blå.*

Lösning A: andelen blå

påse	blå	alla	andel blå
A	20	100	20 %
B	10	40	25 %
C	2	20	10 %

Så räknade vi påse B:
30 + 10 = 40
10 / 40 = 1/4
1/4 = 25/100
alltså 25 %

25 % är störst: påse B. ✓

Eleven räknar i procent hur stor del av alla kulor i varje påse som är blå.

Lösning B: röda på varje blå

Hur många röda på varje blå? ● blå ○ röd

A: 80 / 20 = 4 ●○○○○

B: 30 / 10 = 3 ●○○○

C: 18 / 2 = 9 ●○○○○○○○○○

Färre röda på varje blå ger större chans.
Påse B är bäst. ✓

Eleven räknar hur många röda kulor det finns på varje blå och väljer påsen med färst röda på varje blå.

Lösning C: tankevurpa

A har 20 blå, B 10 och C 2.
20 är flest.
Svar: Påse A, den har flest blå.

Påse A har flest blå men också flest röda, och bara 1/5 av kulorna är blå.

Fråga: ”Vilken påse skulle eleven välja, om påse A hade 1 000 röda?”

Frågor om tankarna bakom

1. Vad räknar eleven ut för varje påse i lösning A?
2. Varför delar eleven i lösning B de röda med de blå?
3. Var syns det i båda lösningarna att påse B är bäst, fast påse A har fler blå?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om talen inte gick att dela jämnt, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Problembanken åk 7–9, problem 11, Kulpåsen.

Lärarens sida: Medel, problem 4, Bollbytet

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

Omar har 26 golfbollar och vill byta bort alla. Han kan byta 3 golfbollar mot 5 tennisbollar, och 2 golfbollar mot 7 pingisbollar.

Hur många tennisbollar och pingisbollar kan Omar få?

Det finns flera svar. Hitta alla.

Problemet har flera svar, och båda bytena ska gå jämnt ut. Omar kan få 0, 10, 20, 30 eller 40 tennisbollar, med 91, 70, 49, 28 eller 7 pingisbollar. Eleverna arbetar systematiskt med multiplikation och division, så att inget svar saknas. Material: klossar eller kuber, 26 per par. Idén kommer ur Hagland, Hedrén och Taflin (2005).

Lösning A

till tennis	kvar	tennis	pingis
0	26	0	91 ✓
3	23	–	–
6	20	10	70 ✓
9	17	–	–
12	14	20	49 ✓
15	11	–	–
18	8	30	28 ✓
21	5	–	–
24	2	40	7 ✓

Så räknade vi raden med 6:
6 / 3 = 2 byten
2 · 5 = 10 tennis
20 / 2 = 10 byten
10 · 7 = 70 pingis

23 kvar är udda, det går inte.

5 sätt ✓

Lösning B

Alla till pingis: 26 / 2 = 13 byten



13 · 7 = 91 pingis

Flytta 6: tre tvåor blir två treor.



2 · 5 = 10 tennis och 10 · 7 = 70 pingis

Varje gång: 21 pingis färre, 10 tennis fler.

tennis:	0	10	20	30	40	
pingis:	91	70	49	28	7	5 sätt ✓

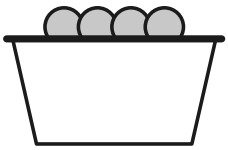
I passet	
Ringa in	Frågorna, talen 26, 3, 5, 2 och 7, och orden byta och alla.
Lyft ut	Vi vet: 3 golfbollar ger 5 tennisbollar, 2 golfbollar ger 7 pingisbollar, Omar byter alla 26. Vi ska ta reda på: hur många av varje, och alla sätt.
Ord och tal	Peka på bilden vid ordet byta. Fråga: Vad räknar 3, och vad räknar 5? Får Omar ta bara pingisbollar? Ja, det är ett av fem sätt.
Förutse	En tabell, bollar som ritas, eller alla till pingis först. Några hittar ett svar och slutar, och andra svarar med antalet byten.
Kör de fast	Föreslå: Välj hur många golfbollar Omar byter mot tennisbollar. Hur många blir kvar till pingis? Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att det inte går med 23 kvar. Försök använda det!
Säg inte	Golfbollarna till tennis ökar med 6 åt gången. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: 10 golfbollar (0 tennis och 35 pingis, eller 10 och 14). Större: Kan Omar få lika många tennisbollar som pingisbollar? (Nej, inget av de fem sätten) Vad kan han få för 50 golfbollar? (9 sätt, från 0 och 175 till 80 och 7)
Jämför	Två treor är sex, och det som blir kvar ska gå att dela med 2. I A syns det i varannan rad, och i B när eleven flyttar 6 golfbollar.
Fel eller osäker	Ni säger 2 tennisbollar och 10 pingisbollar. Hur kan ni kontrollera det mot problemet? *”Är det alla sätt?”* Hur kan ni kontrollera att inget saknas?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

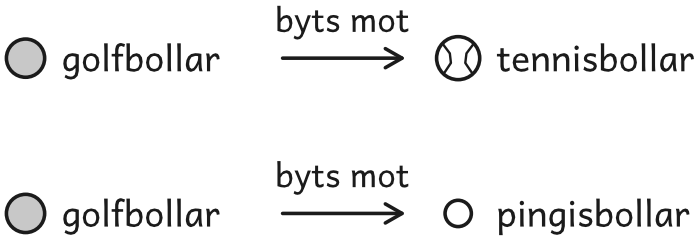
Bollbytet

Omar har 26 golfbollar och vill byta bort alla.

Han kan byta 3 golfbollar mot 5 tennisbollar, och 2 golfbollar mot 7 pingisbollar.



Omars golfbollar



Frågorna

1. Hur många tennisbollar och pingisbollar kan Omar få?
2. Det finns flera svar. Hitta alla.

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Bollbytet

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

till tennis	kvar	tennis	pingis
0	26	0	91 ✓
3	23	–	–
6	20	10	70 ✓
9	17	–	–
12	14	20	49 ✓
15	11	–	–
18	8	30	28 ✓
21	5	–	–
24	2	40	7 ✓

Så räknade vi raden med 6:

6 / 3 = 2 byten
2 · 5 = 10 tennis
20 / 2 = 10 byten
10 · 7 = 70 pingis

23 kvar är udda, det går inte.

5 sätt ✓

Lösning B

Alla till pingis: 26 / 2 = 13 byten



13 · 7 = 91 pingis

Flytta 6: tre tvåor blir två treor.



2 · 5 = 10 tennis och 10 · 7 = 70 pingis

Varje gång: 21 pingis färre, 10 tennis fler.

tennis:	0	10	20	30	40	
pingis:	91	70	49	28	7	5 sätt ✓

Frågor att prata om

1. Hur väljer eleven raderna i lösning A, och varför går bara varannan rad?
2. Varför flyttar eleven i lösning B 6 golfbollar i taget från pingis till tennis?
3. Var syns det i båda lösningarna att golfbollarna till tennis ökar med 6 åt gången?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 100 golfbollar, och varför?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Lösningsförslag · Taluppfattning

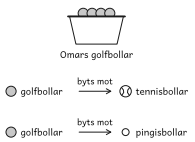
Bollbytet

Problemet

Omar har 26 golfbollar och vill byta bort alla. Han kan byta 3 golfbollar mot 5 tennisbollar, och 2 golfbollar mot 7 pingisbollar.

Hur många tennisbollar och pingisbollar kan Omar få?

Det finns flera svar. Hitta alla.



Svaret: 0, 10, 20, 30 eller 40 tennisbollar, med 91, 70, 49, 28 eller 7 pingisbollar.
Kontroll: Tennis + pingis: 0 + 26, 6 + 20, 12 + 14, 18 + 8, 24 + 2 golfbollar.

Idén: *Golfbollarna till tennis går i treor och resten i tvåor, så sätten skiljer sig med 6 golfbollar.*

Lösning A: pröva tre i taget

till tennis	kvar	tennis	pingis
0	26	0	91 ✓
3	23	–	–
6	20	10	70 ✓
9	17	–	–
12	14	20	49 ✓
15	11	–	–
18	8	30	28 ✓
21	5	–	–
24	2	40	7 ✓

Så räknade vi raden med 6:

6 / 3 = 2 byten
→ 2 · 5 = 10 tennis
20 / 2 = 10 byten
10 · 7 = 70 pingis

23 kvar är udda, det går inte.

5 sätt ✓

Eleven prövar 0, 3, 6 och fler golfbollar till tennis, och resten går att dela med 2 i varannan rad.

Lösning B: alla till pingis först

Alla till pingis: 26 / 2 = 13 byten



13 · 7 = 91 pingis

Flytta 6: tre tvåor blir två treor.



2 · 5 = 10 tennis och 10 · 7 = 70 pingis

Varje gång: 21 pingis färre, 10 tennis fler.

tennis:	0	10	20	30	40	
pingis:	91	70	49	28	7	5 sätt ✓

Eleven byter alla mot pingis och flyttar sedan 6 golfbollar i taget från pingis till tennis.

Lösning C: tankevurpa

6 + 20 = 26 golfbollar

Tennis: 6 / 3 = 2

Pingis: 20 / 2 = 10

Svar: 2 tennis och 10 pingis.

Eleven svarar med antalet byten. Varje byte ger 5 tennisbollar eller 7 pingisbollar: 2 · 5 = 10 och 10 · 7 = 70.

Fråga: ”Hur många tennisbollar ger 6 golfbollar?”

Frågor om tankarna bakom

1. Hur väljer eleven raderna i lösning A, och varför går bara varannan rad?
2. Varför flyttar eleven i lösning B 6 golfbollar i taget från pingis till tennis?
3. Var syns det i båda lösningarna att golfbollarna till tennis ökar med 6 åt gången?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med 100 golfbollar, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Hagland, Hedrén och Taflin (2005).

Lärarens sida: Medel, problem 5, Tangrammet

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

Ett tangram är ett pussel med sju bitar: fem trianglar, en kvadrat och ett parallellogram. Tillsammans bildar bitarna en stor kvadrat. Den stora kvadraten har arean 400 cm².

Hur stor area har varje bit?

Vilka bitar har lika stor area?

Area som delar av en helhet. De stora trianglarna är 100 cm² var, den mellanstora, kvadraten och parallellogrammet 50 cm² och de små 25 cm². Eleverna lägger bitarna på varandra och ser att olika former kan ha samma area. Material: ett tangram per par, eller en kopia av bilden och en sax. Idén kommer ur Hagland, Hedrén och Taflin (2005).

Lösning A



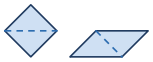
De två stora är halva den stora kvadraten.
En stor: 400 / 4 = 100 cm²



Den mellanstora täcker halva den stora:
100 / 2 = 50 cm²

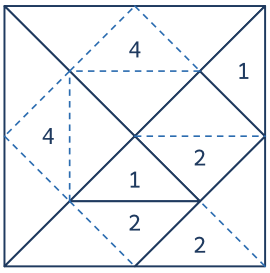


De två små täcker den mellanstora:
50 / 2 = 25 cm²



De täcker också kvadraten och parallellogrammet:
2 · 25 = 50 cm² ✓

Lösning B



4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 16 små trianglar
↓
400 / 16 = 25 cm²

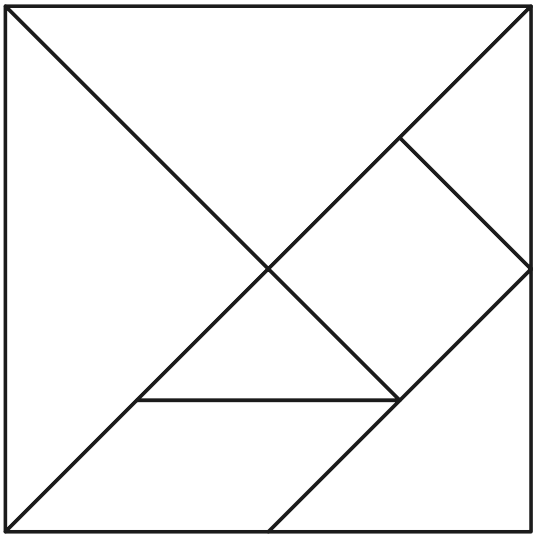
stor: 4 · 25 = 100 cm²
med 2 små: 2 · 25 = 50 cm²
liten: 25 cm² ✓

I passet	
Ringa in	Frågorna, talet 400, och orden area, cm², kvadrat och parallellogram.
Lyft ut	Vi vet: sju bitar, och hela kvadraten har arean 400 cm². Vi ska ta reda på: arean av varje bit, och vilka som är lika stora.
Ord och tal	Visa bilden och peka på bitarna. Fråga: Vad betyder area? Vad räknar 400, hela kvadraten eller en bit?
Förutse	Bitar som läggs på varandra, rutor som ritas, eller halvor och fjärdedelar. Några räknar 400 / 7, som om alla bitar vore lika stora.
Kör de fast	Föreslå: Klipp ut bitarna ur en kopia och lägg dem på varandra. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att två små täcker kvadraten. Försök använda det!
Säg inte	Dela hela kvadraten i 16 små trianglar. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Hela kvadraten är 16 cm² (små 1, stora 4 och de andra 2 cm²). Större: Lägg en figur med arean 300 cm². (Som alla utom en stor triangel) Ett annat tangram har ett parallellogram på 125 cm². Hur stort är hela? (1 000 cm²)
Jämför	Kvadraten, parallellogrammet och den mellanstora triangeln är två små trianglar var. Lyft fram att olika former kan ha samma area, som A visar och B räknar.
Fel eller osäker	Ni säger att kvadraten är större än parallellogrammet. Hur kan ni kontrollera det med bitarna? *”Blir summan 400?”* Hur kan ni kontrollera att alla sju bitar är med?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Tangrammet

Ett tangram är ett pussel med sju bitar: fem trianglar, en kvadrat och ett parallellogram. Tillsammans bildar bitarna en stor kvadrat. Den stora kvadraten har arean 400 cm^2.



Frågorna

1. Hur stor area har varje bit?
2. Vilka bitar har lika stor area?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Tangrammet

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A



De två stora är halva den stora kvadraten.

En stor: 400 / 4 = 100 cm²



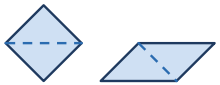
Den mellanstora täcker halva den stora:

100 / 2 = 50 cm²



De två små täcker den mellanstora:

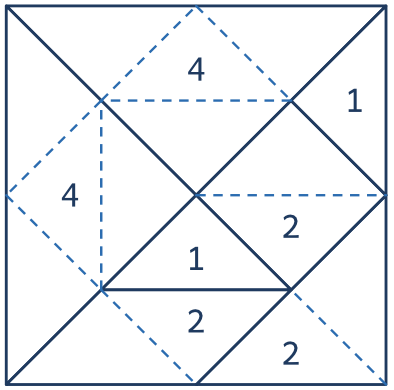
50 / 2 = 25 cm²



De täcker också kvadraten och parallellogrammet:

2 · 25 = 50 cm² ✓

Lösning B



4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 16 små trianglar

↓

400 / 16 = 25 cm²

stor: 4 · 25 = 100 cm²

med 2 små: 2 · 25 = 50 cm²

liten: 25 cm² ✓

Frågor att prata om

1. Vilka bitar lägger eleven på varandra i lösning A?
2. Varför delar eleven i lösning B 400 med 16?
3. Var syns det i båda lösningarna att kvadraten och parallellogrammet har samma area?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om hela tangrammet var 1 000 cm², och varför?

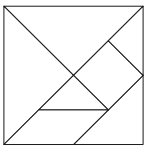
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Lösningsförslag · Geometri

Tangrammet

Problemet

Ett tangram är ett pussel med sju bitar: fem trianglar, en kvadrat och ett parallellogram. Tillsammans bildar bitarna en stor kvadrat. Den stora kvadraten har arean 400 cm².



Hur stor area har varje bit?

Vilka bitar har lika stor area?

Svaret: De stora trianglarna är 100 cm², de små 25 och de tre andra 50 var.
Kontroll: 2 · 100 + 3 · 50 + 2 · 25 = 400 för alla sju bitarna.

Idén: *Kvadraten, parallellogrammet och den mellanstora triangeln är två små trianglar var, så olika former kan ha samma area.*

Lösning A: bitarna på varandra



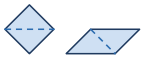
De två stora är halva den stora kvadraten.
En stor: 400 / 4 = 100 cm²



Den mellanstora täcker halva den stora:
100 / 2 = 50 cm²



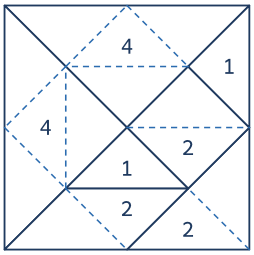
De två små täcker den mellanstora:
50 / 2 = 25 cm²



De täcker också kvadraten och parallellogrammet:
2 · 25 = 50 cm² ✓

Eleven lägger bitarna på varandra och halverar, från en stor triangel på 100 cm² till en liten.

Lösning B: 16 små trianglar



4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 16 små trianglar
↓
400 / 16 = 25 cm²

stor: 4 · 25 = 100 cm²
med 2 små: 2 · 25 = 50 cm²
liten: 25 cm² ✓

Eleven delar hela kvadraten i 16 små trianglar och räknar hur många som ryms i varje bit.

Lösning C: tankevurpa

Tangrammet har 7 bitar.
400 / 7 = 57 rest 1
Svar: Ungefär 57 cm² var.

Eleven delar som om alla sju bitar vore lika stora, men fyra små täcker en stor triangel.
Fråga: ”Hur kan ni pröva 57 cm² med bitarna?”

Frågor om tankarna bakom

1. Vilka bitar lägger eleven på varandra i lösning A?
2. Varför delar eleven i lösning B 400 med 16?
3. Var syns det i båda lösningarna att kvadraten och parallellogrammet har samma area?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om hela tangrammet var 1 000 cm², och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Hagland, Hedrén och Taflin (2005).

Lärarens sida: Medel, problem 6, Skolan

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

På en skola går fler än 300 och färre än 400 elever. Exakt 1/3 av eleverna går i årskurs 7. Exakt 20 % av eleverna åker buss till skolan.

Hur många elever kan det gå på skolan? Ge ett exempel.

Hitta alla möjliga antal, och en regel för dem.

Problemet handlar om bråk, procent och delbarhet. Skolan kan ha 315, 330, 345, 360, 375 eller 390 elever, alltså ett antal som går att dela med 15. Eleverna prövar antal, ser att 20 % är 1/5 och letar efter alla svar. Idén kommer ur Hagland, Hedrén och Taflin (2005).

Lösning A

elever	1/3	20 %	går?
320	106 rest 2	64	nej
325	108 rest 1	65	nej
330	110	66	ja
345	115	69	ja
360	120	72	ja

Så räknade vi 345:

345 / 3 = 115

10 % är 34,5

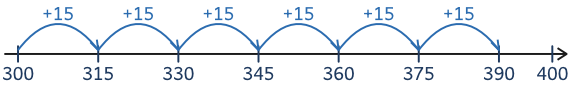
2 · 34,5 = 69

Raderna som går ligger 15 isär:

315, 330, 345, 360, 375 och 390 ✓

Lösning B

1/3: går att dela med 3.
20 % är 1/5: går att dela med 5.
Båda: går att dela med 15.
300 / 15 = 20, men 300 är för få.



390 + 15 = 405 är för många.

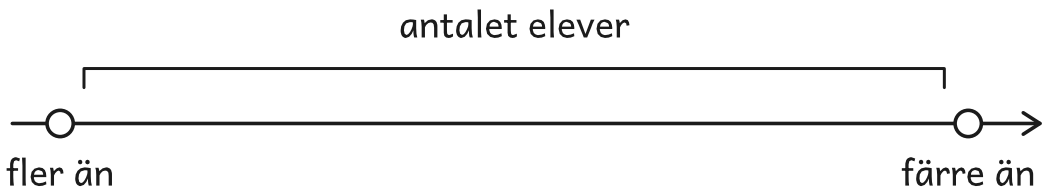
6 svar ✓

I passet	
Ringa in	Frågorna, talen 300, 400, 1/3 och 20 %, och orden exakt, *”fler än”* och *”färre än”*.
Lyft ut	Vi vet: fler än 300 och färre än 400 elever, 1/3 går i årskurs 7, 20 % åker buss. Vi ska ta reda på: alla möjliga antal, och en regel.
Ord och tal	Visa tallinjen. Fråga: Vad betyder exakt, och fler än 300? Kan en elev delas? Vad är 20 % som bråk?
Förutse	Antal som prövas i en tabell, 10 % två gånger, eller delbart med 3 och 5. Några slutar vid första svaret.
Kör de fast	Föreslå: Välj ett antal och räkna ut 1/3 och 20 % av det. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att 330 och 345 går. Försök använda det!
Säg inte	Antalet ska gå att dela med 15. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Fler än 20 och färre än 70 elever (30, 45 eller 60). Större: Vilka antal är möjliga om 1/4 går i årskurs 7 och 1/6 åker buss? (De som går att dela med 12: 312, 324 och så vidare till 396)
Jämför	1/3 och 20 % går jämnt ut när antalet går att dela med 3 och med 5. I A syns det som 15 mellan svaren, och i B som 15-hopp.
Fel eller osäker	Ni säger att 350 går. Hur kan ni kontrollera det mot problemet? Ni har ett svar. Hur kan ni kontrollera om det finns fler?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Skolan

På en skola går fler än 300 och färre än 400 elever. Exakt 1/3 av eleverna går i årskurs 7. Exakt 20 % av eleverna åker buss till skolan.



Frågorna

1. Hur många elever kan det gå på skolan? Ge ett exempel.
2. Hitta alla möjliga antal, och en regel för dem.

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Skolan

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

elever	1/3	20 %	går?
320	106 rest 2	64	nej
325	108 rest 1	65	nej
330	110	66	ja
345	115	69	ja
360	120	72	ja

Så räknade vi 345:

345 / 3 = 115

10 % är 34,5

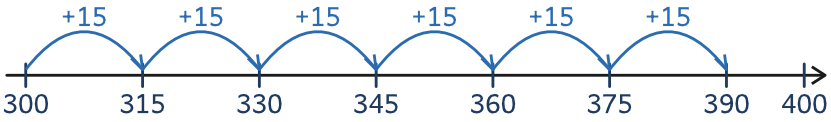
2 · 34,5 = 69

Raderna som går ligger 15 isär:

315, 330, 345, 360, 375 och 390 ✓

Lösning B

1/3: går att dela med 3.
20 % är 1/5: går att dela med 5.
Båda: går att dela med 15.
300 / 15 = 20, men 300 är för få.



390 + 15 = 405 är för många.

6 svar ✓

Frågor att prata om

1. Vad prövar eleven för varje antal i lösning A?
2. Varför hoppar eleven 15 i taget i lösning B?
3. Var syns det i båda lösningarna att svaren ligger 15 isär?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om skolan hade mellan 300 och 3 000 elever, och varför?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Lösningsförslag · Taluppfattning

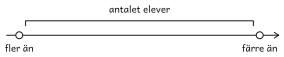
Skolan

Problemet

På en skola går fler än 300 och färre än 400 elever. Exakt 1/3 av eleverna går i årskurs 7. Exakt 20 % av eleverna åker buss till skolan.

Hur många elever kan det gå på skolan? Ge ett exempel.

Hitta alla möjliga antal, och en regel för dem.



Svaret: 315, 330, 345, 360, 375 eller 390 elever, som alla går att dela med 15.
Kontroll: 1/3 av 315 = 105, 20 % av 315 = 63, och 300 och 405 är utanför.

Idén: *1/3 och 20 % går jämnt ut när antalet går att dela med 3 och med 5.*

Lösning A: pröva 1/3 och 20 %

elever	1/3	20 %	går?
320	106 rest 2	64	nej
325	108 rest 1	65	nej
330	110	66	ja
345	115	69	ja
360	120	72	ja

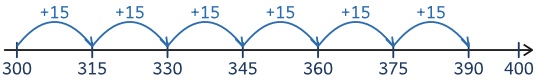
Så räknade vi 345:
345 / 3 = 115
10 % är 34,5
2 · 34,5 = 69

Raderna som går ligger 15 isär:
315, 330, 345, 360, 375 och 390 ✓

Eleven prövar antal i en tabell och ser att de som går ligger 15 isär.

Lösning B: resonemang och tallinje

1/3: går att dela med 3.
20 % är 1/5: går att dela med 5.
Båda: går att dela med 15.
300 / 15 = 20, men 300 är för få.



390 + 15 = 405 är för många.

6 svar ✓

Eleven ser att antalet ska gå att dela med 3 och 5, alltså med 15, och hoppar 15 i taget.

Lösning C: tankevurpa

Mitt emellan 300 och 400: 350
20 % av 350 = 70
Svar: 350 elever.

20 % stämmer, men 1/3 av 350 går inte jämnt ut:
350 / 3 = 116 rest 2.
Fråga: ”Hur kan ni pröva 350 mot hela problemet?”

Frågor om tankarna bakom

1. Vad prövar eleven för varje antal i lösning A?
2. Varför hoppar eleven 15 i taget i lösning B?
3. Var syns det i båda lösningarna att svaren ligger 15 isär?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om skolan hade mellan 300 och 3 000 elever, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Hagland, Hedrén och Taflin (2005).

Lärarens sida: Medel, problem 7, Samlarbilderna

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

Fem elever samlar på bilder. Den som har flest har 40 bilder. Medelvärdet är 22 bilder. Medianen är 20 och typvärdet är 20.

Hur många bilder kan var och en av de fem ha?

Det finns flera svar. Hitta så många ni kan.

Problemet handlar om medelvärde, median och typvärde och har flera svar. Ett svar är 10, 20, 20, 20 och 40, och det finns 14 svar om alla har minst en bild. Eleverna använder att summan är 5 · 22 = 110 och ordnar talen. Idén kommer ur Hagland, Hedrén och Taflin (2005).

Lösning A

Pröva fem tal i storleksordning:

10	15	20	25	40	Summan är 110, men inget tal står två gånger.
10	20	20	20	40	10 + 20 + 20 + 20 + 40 = 110 110 / 5 = 22 ✓
14	16	20	20	40	14 + 16 + 20 + 20 + 40 = 110 110 / 5 = 22 ✓

Medianen och typvärdet är 20 i båda.

Lösning B

Summan: 5 · 22 = 110

		20		40	Kvar till tre rutor: 110 − 20 − 40 = 50

Typvärdet 20: ett 20 till.

		20	20	40	50 − 20 = 30 till två: 10 och 20, 14 och 16
	20	20		40	50 − 20 = 30 till två: 5 och 25, 6 och 24 …

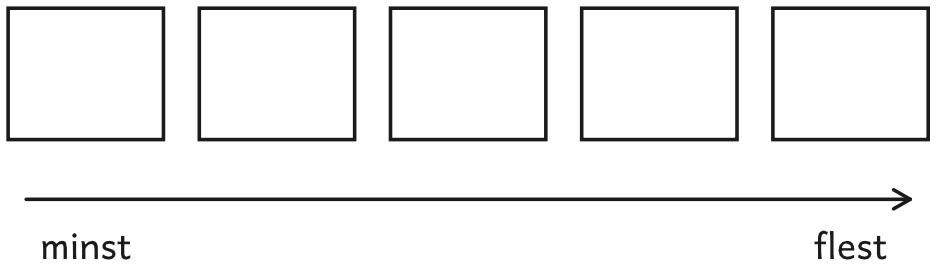
Kontroll: 5 + 20 + 20 + 25 + 40 = 110 ✓

I passet	
Ringa in	Frågorna, talen 40, 22 och 20, och orden flest, medelvärde, median och typvärde.
Lyft ut	Vi vet: fem elever, den som har flest har 40, medelvärdet 22, medianen 20, typvärdet 20. Vi ska ta reda på: hur många bilder var och en kan ha.
Ord och tal	Visa rutorna på bilden. Fråga: Vad betyder median och typvärde? Vad räknar 22? Måste någon av eleverna ha 22 bilder?
Förutse	Tal som prövas i rutorna, summan 110, eller 20 i mitten först. Några skriver inte talen i ordning.
Kör de fast	Föreslå: Skriv fem tal i rutorna och räkna medelvärdet. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att summan måste bli 110. Försök använda det!
Säg inte	Sätt 20 i mitten och 40 sist, och summan är 110. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Den som har flest har 8, medelvärdet är 5, och medianen och typvärdet är 4 (3 svar). Större: Hitta alla svar, om alla fem har minst en bild och bara 20 är typvärde. Hur vet ni att ni har alla? (14 svar, efter var det andra 20 står)
Jämför	Summan är 5 · 22 = 110, och 20 står minst två gånger. A prövar och räknar summan, och B börjar med de tal som måste stå.
Fel eller osäker	Ni säger att 15, 15, 20, 20 och 40 går. Hur kan ni kontrollera typvärdet mot problemet? *”Är medianen 20?”* Hur kan ni kontrollera det?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Samlarbilderna

Fem elever samlar på bilder. Den som har flest har 40 bilder. Medelvärdet är 22 bilder. Medianen är 20 och typvärdet är 20.



Frågorna

1. Hur många bilder kan var och en av de fem ha?
2. Det finns flera svar. Hitta så många ni kan.

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Samlarbilderna

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

Pröva fem tal i storleksordning:

10	15	20	25	40

Summan är 110, men inget tal står två gånger.

10	20	20	20	40

10 + 20 + 20 + 20 + 40 = 110
110 / 5 = 22 ✓

14	16	20	20	40

14 + 16 + 20 + 20 + 40 = 110
110 / 5 = 22 ✓

Medianen och typvärdet är 20 i båda.

Lösning B

Summan: 5 · 22 = 110

		20		40

Kvar till tre rutor:
110 − 20 − 40 = 50

Typvärdet 20: ett 20 till.

		20	20	40

50 − 20 = 30 till två:
10 och 20,
14 och 16

	20	20		40

50 − 20 = 30 till två:
5 och 25, 6 och 24 …

Kontroll: 5 + 20 + 20 + 25 + 40 = 110 ✓

Frågor att prata om

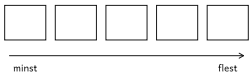
1. Vad prövar eleven för varje rad i lösning A?
2. Varför räknar eleven i lösning B 110 − 20 − 40?
3. Var syns det i båda lösningarna att summan måste vara 110?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja för att hitta alla svar, och varför?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Samlarbilderna

Problemet

Fem elever samlar på bilder. Den som har flest har 40 bilder. Medelvärdet är 22 bilder. Medianen är 20 och typvärdet är 20.



Hur många bilder kan var och en av de fem ha?

Det finns flera svar. Hitta så många ni kan.

Svaret: Har alla minst en bild, finns det 14 svar, som 10, 20, 20, 20, 40.
Kontroll: 10 + 20 + 20 + 20 + 40 = 110 = 5 · 22, medianen 20 och typvärdet 20.

Idén: *Summan är 5 · 22 = 110, och 20 står minst två gånger.*

Lösning A: pröva och förbättra

Pröva fem tal i storleksordning:

10	15	20	25	40	Summan är 110, men inget tal står två gånger.
10	20	20	20	40	10 + 20 + 20 + 20 + 40 = 110 110 / 5 = 22 ✓
14	16	20	20	40	14 + 16 + 20 + 20 + 40 = 110 110 / 5 = 22 ✓

Medianen och typvärdet är 20 i båda.

Eleven prövar fem tal i storleksordning med summan 110 och ändrar dem tills typvärdet är 20.

Lösning B: det som måste stå

Summan: 5 · 22 = 110

		20		40	Kvar till tre rutor: 110 − 20 − 40 = 50

Typvärdet 20: ett 20 till.

		20	20	40	50 − 20 = 30 till två: 10 och 20, 14 och 16
	20	20		40	50 − 20 = 30 till två: 5 och 25, 6 och 24 ...

Kontroll: 5 + 20 + 20 + 25 + 40 = 110 ✓

Eleven sätter 20 i mitten och 40 sist. De tre andra blir 50, och ett av dem måste vara 20.

Lösning C: tankevurpa

15 + 15 + 20 + 20 + 40 = 110

110 / 5 = 22

Svar: 15, 15, 20, 20 och 40.

Summan, medianen och 40 stämmer, men 15 och 20 står två gånger var, så typvärdet är inte bara 20.
Fråga: ”Vilket villkor har eleven inte prövat?”

Frågor om tankarna bakom

1. Vad prövar eleven för varje rad i lösning A?
2. Varför räknar eleven i lösning B 110 − 20 − 40?
3. Var syns det i båda lösningarna att summan måste vara 110?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja för att hitta alla svar, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Hagland, Hedrén och Taflin (2005).

Lärarens sida: Medel, problem 8, Klädaffären

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

I en affär med begagnade kläder kostar 2 hattar lika mycket som 5 kjolar. Där kostar 3 kjolar lika mycket som 8 tröjor, och 2 tröjor kostar lika mycket som 3 kepsar.

Fyra vänner handlar. Ali köper 3 hattar, Bea 7 kjolar, Cleo 18 tröjor och Dan 29 kepsar.

Vem betalar mest?

Ordna de fyra köpen från dyrast till billigast.

Problemet handlar om likheter i en kedja. Ali betalar mest och Cleo minst, och ordningen är Ali, Dan, Bea och Cleo. Eleverna räknar med proportioner i flera steg och väljer en enhet som de räknar om allt till, kepsar eller kronor. Idén kommer ur Känguru 2023, Benjamin nr 24.

Lösning A

2 tröjor kostar som 3 kepsar
8 tröjor: 4 · 3 = 12 kepsar
3 kjolar kostar som 12 kepsar
en kjol: 12 / 3 = 4 kepsar
5 kjolar: 5 · 4 = 20 kepsar
en hatt: 20 / 2 = 10 kepsar

vem	köp	i kepsar
Ali	3 hattar	3 · 10 = 30
Bea	7 kjolar	7 · 4 = 28
Cleo	18 tröjor	9 · 3 = 27
Dan	29 kepsar	29

Från dyrast: Ali 30, Dan 29, Bea 28 och Cleo 27.
Ali betalar mest. ✓

Lösning B

Välj: en keps kostar 10 kr.
en tröja: 3 · 10 / 2 = 15 kr
en kjol: 8 · 15 / 3 = 40 kr
en hatt: 5 · 40 / 2 = 100 kr

vem	köp	kronor
Ali	3 hattar	3 · 100 = 300
Bea	7 kjolar	7 · 40 = 280
Cleo	18 tröjor	18 · 15 = 270
Dan	29 kepsar	29 · 10 = 290

Från dyrast: Ali 300, Dan 290, Bea 280 och Cleo 270.
Ali betalar mest. ✓

I passet	
Ringa in	Frågorna, talen i de tre likheterna, och orden *”kostar lika mycket som”*.
Lyft ut	Vi vet: tre likheter mellan priser, och vad var och en köper. Vi ska ta reda på: vem som betalar mest, och ordningen.
Ord och tal	Visa hatten, kjolen, tröjan och kepsen på bilden. Fråga: Vilken är dyrare, en kjol eller en tröja? Hur vet ni det?
Förutse	Allt i kepsar, ett pris som väljs, eller sakerna som ritas. Några tror att en kjol kostar som 8 tröjor.
Kör de fast	Föreslå: Leta efter en sak som ni kan räkna om allt till. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att en tröja kostar mer än en keps. Försök använda det!
Säg inte	Räkna om allt till kepsar, eller säg att en keps kostar 10 kr. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: En hatt kostar som 2 kjolar, och en kjol som 3 tröjor. Ordna 2 hattar, 3 kjolar och 10 tröjor (hattarna, tröjorna, kjolarna). Större: Hitta på ett köp som kostar lika mycket som Beas. (Som 28 kepsar, eller 2 hattar och 2 kjolar)
Jämför	Vi räknar om allt till samma enhet. En hatt är 10 kepsar i A och 100 kr i B, alltså 10 kepsar i båda. Lyft fram att enheten går att välja.
Fel eller osäker	Ni säger att en kjol kostar som 8 tröjor. Hur kan ni kontrollera det mot problemet? *”Är ordningen rätt?”* Hur kan ni kontrollera den på ett annat sätt?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Klädaffären

I en affär med begagnade kläder kostar 2 hattar lika mycket som 5 kjolar. Där kostar 3 kjolar lika mycket som 8 tröjor, och 2 tröjor kostar lika mycket som 3 kepsar.

Fyra vänner handlar. Ali köper 3 hattar, Bea 7 kjolar, Cleo 18 tröjor och Dan 29 kepsar.



hatt



kjol



tröja



keps

Frågorna

1. Vem betalar mest?
2. Ordna de fyra köpen från dyrast till billigast.

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Klädaffären

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

2 tröjor kostar som 3 kepsar

8 tröjor: 4 · 3 = 12 kepsar

3 kjolar kostar som 12 kepsar

en kjol: 12 / 3 = 4 kepsar

5 kjolar: 5 · 4 = 20 kepsar

en hatt: 20 / 2 = 10 kepsar

vem	köp	i kepsar
Ali	3 hattar	3 · 10 = 30
Bea	7 kjolar	7 · 4 = 28
Cleo	18 tröjor	9 · 3 = 27
Dan	29 kepsar	29

Från dyrast: Ali 30, Dan 29, Bea 28 och Cleo 27.

Ali betalar mest. ✓

Lösning B

Välj: en keps kostar 10 kr.

en tröja: 3 · 10 / 2 = 15 kr

en kjol: 8 · 15 / 3 = 40 kr

en hatt: 5 · 40 / 2 = 100 kr

vem	köp	kronor
Ali	3 hattar	3 · 100 = 300
Bea	7 kjolar	7 · 40 = 280
Cleo	18 tröjor	18 · 15 = 270
Dan	29 kepsar	29 · 10 = 290

Från dyrast: Ali 300, Dan 290, Bea 280 och Cleo 270.

Ali betalar mest. ✓

Frågor att prata om

1. Hur räknar eleven i lösning A ut vad en kjol är i kepsar?
2. Varför får eleven i lösning B välja att en keps kostar 10 kr?
3. Var syns det i båda lösningarna att en hatt kostar som tio kepsar?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om en sak till kom med, och varför?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

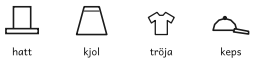
Lösningsförslag · Samband och förändring

Klädaffären

Problemet

I en affär med begagnade kläder kostar 2 hattar lika mycket som 5 kjolar. Där kostar 3 kjolar lika mycket som 8 tröjor, och 2 tröjor kostar lika mycket som 3 kepsar.

Fyra vänner handlar. Ali köper 3 hattar, Bea 7 kjolar, Cleo 18 tröjor och Dan 29 kepsar.



Vem betalar mest?

Ordna de fyra köpen från dyrast till billigast.

Svaret: Ali betalar mest. Från dyrast: Ali, Dan, Bea och Cleo.
Kontroll: Ali 3 · 10 = 30, Dan 29, Bea 7 · 4 = 28, Cleo 18 · 1,5 = 27 kepsar.

Idén: *Alla priser går att räkna om till samma enhet, och enheten går att välja.*

Lösning A: allt i kepsar

2 tröjor kostar som 3 kepsar
8 tröjor: 4 · 3 = 12 kepsar
3 kjolar kostar som 12 kepsar
en kjol: 12 / 3 = 4 kepsar
5 kjolar: 5 · 4 = 20 kepsar
en hatt: 20 / 2 = 10 kepsar

vem	köp	i kepsar
Ali	3 hattar	3 · 10 = 30
Bea	7 kjolar	7 · 4 = 28
Cleo	18 tröjor	9 · 3 = 27
Dan	29 kepsar	29

Från dyrast: Ali 30, Dan 29, Bea 28 och Cleo 27.
Ali betalar mest. ✓

Eleven går igenom likheterna steg för steg och räknar om tröjor, kjolar och hattar till kepsar.

Lösning B: ett påhittat pris

Välj: en keps kostar 10 kr.
en tröja: 3 · 10 / 2 = 15 kr
en kjol: 8 · 15 / 3 = 40 kr
en hatt: 5 · 40 / 2 = 100 kr

vem	köp	kronor
Ali	3 hattar	3 · 100 = 300
Bea	7 kjolar	7 · 40 = 280
Cleo	18 tröjor	18 · 15 = 270
Dan	29 kepsar	29 · 10 = 290

Från dyrast: Ali 300, Dan 290, Bea 280 och Cleo 270.
Ali betalar mest. ✓

Eleven bestämmer att en keps kostar 10 kr och räknar ut priset på de andra sakerna.

Lösning C: tankevurpa

1 kjol = 8 tröjor = 12 kepsar
1 hatt = 5 · 12 / 2 = 30 kepsar
Ali 90, Bea 84, Dan 29, Cleo 27
Svar: Ali, Bea, Dan och Cleo.

Eleven läser 3 kjolar som en kjol. En kjol kostar som 4 kepsar, och en hatt som 10.

Fråga: ”Vad kostar 3 kjolar i kepsar med elevens priser?”

Frågor om tankarna bakom

1. Hur räknar eleven i lösning A ut vad en kjol är i kepsar?
2. Varför får eleven i lösning B välja att en keps kostar 10 kr?
3. Var syns det i båda lösningarna att en hatt kostar som tio kepsar?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja om en sak till kom med, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Lärarens sida: Medel, problem 9, Pantpengarna

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

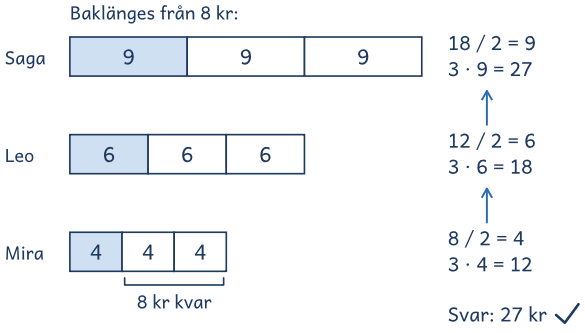
Tre syskon pantar burkar och lägger pengarna i en ask. Saga tar 1/3 av pengarna och går. Sedan kommer Leo. Han tror att ingen har tagit något och tar 1/3 av det som finns kvar. Sist kommer Mira och gör likadant. Då ligger 8 kr kvar i asken.

Hur mycket pengar fick syskonen för burkarna?

Hur mycket tog var och en?

Problemet handlar om bråk av det som finns kvar och om att räkna baklänges. Från början fanns 27 kr, och Saga tog 9 kr, Leo 6 kr och Mira 4 kr. Eleverna ser att 8 kr är 2/3 av det Mira hittade i asken och går bakåt ett steg i taget. Idén kommer ur Hagland, Hedrén och Taflin (2005).

Lösning A



Lösning B

början	Saga	Leo	Mira	kvar
30	10	nej		
81	27	18	12	24
27	9	6	4	8 ✓

Så räknade vi 27:
27 / 3 = 9
27 − 9 = 18
18 / 3 = 6
18 − 6 = 12
12 / 3 = 4
12 − 4 = 8

81 gav 24 kvar.
24 är tre gånger så mycket som 8:
pröva en tredjedel, 81 / 3 = 27.

Svar: 27 kr ✓

I passet	
Ringa in	Frågorna, talen 1/3 och 8 kr, och orden *”det som finns kvar”* och *”likadant”*.
Lyft ut	Vi vet: alla tar 1/3 av det som är kvar, och sist är 8 kr kvar. Vi ska ta reda på: pengarna från början, och vad var och en tog.
Ord och tal	Visa stapeln på bilden. Fråga: Vad betyder *”det som finns kvar”*? Är 8 kr Miras del eller det som blev kvar?
Förutse	Staplar som delas, tal som prövas i en tabell, eller baklänges från 8 kr. Några tror att 8 kr är 1/3 i stället för 2/3.
Kör de fast	Föreslå: Gissa hur mycket som fanns från början, och räkna vad var och en tar. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att Mira lämnar 2/3 kvar. Försök använda det!
Säg inte	8 kr är 2/3 av det Mira hittade, så gå baklänges. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Två syskon gör likadant, och sist är 4 kr kvar (9 kr: Saga tog 3 kr och Leo 2 kr). Större: Fyra syskon gör likadant, och sist är 16 kr kvar. Hur mycket fanns från början? (81 kr)
Jämför	Varje gång blir 2/3 kvar. I A är 8 kr två tredjedelar, så en tredjedel är 4 kr. I B är det 18, 12 och 8 kr som blir kvar.
Fel eller osäker	Ni säger att Mira tog 8 kr. Hur kan ni kontrollera det mot problemet? *”Är det 27 kr?”* Hur kan ni kontrollera att det blir 8 kr kvar?

Pantpengarna

Tre syskon pantar burkar och lägger pengarna i en ask. Saga tar 1/3 av pengarna och går. Sedan kommer Leo. Han tror att ingen har tagit något och tar 1/3 av det som finns kvar. Sist kommer Mira och gör likadant. Då ligger 8 kr kvar i asken.

pengarna i asken

Saga tar 1/3		

Frågorna

1. Hur mycket pengar fick syskonen för burkarna?
2. Hur mycket tog var och en?

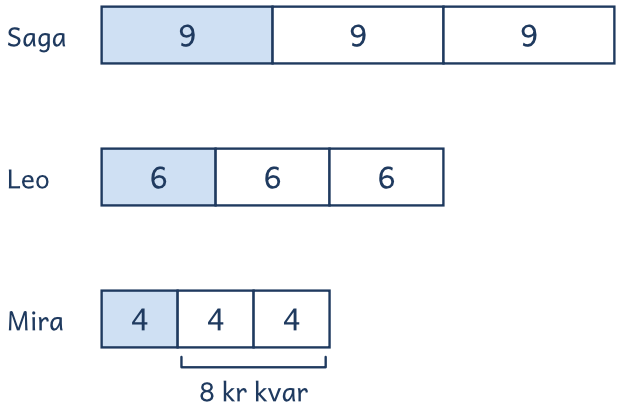
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Pantpengarna

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A

Baklänges från 8 kr:



18 / 2 = 9
3 · 9 = 27

12 / 2 = 6
3 · 6 = 18

8 / 2 = 4
3 · 4 = 12

Svar: 27 kr ✓

Lösning B

början	Saga	Leo	Mira	kvar
30	10	nej		
81	27	18	12	24
27	9	6	4	8 ✓

Så räknade vi 27:
27 / 3 = 9
27 − 9 = 18
18 / 3 = 6
18 − 6 = 12
12 / 3 = 4
12 − 4 = 8

81 gav 24 kvar.
24 är tre gånger så mycket som 8:
pröva en tredjedel, 81 / 3 = 27.

Svar: 27 kr ✓

Frågor att prata om

1. Varför börjar eleven i lösning A med den nedersta stapeln?
2. Varför prövar eleven 27 efter 81 i lösning B?
3. Var syns det i båda lösningarna att 2/3 blir kvar varje gång?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med fem syskon, och varför?

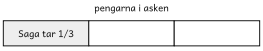
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Lösningsförslag · Taluppfattning

Pantpengarna

Problemet

Tre syskon pantar burkar och lägger pengarna i en ask. Saga tar 1/3 av pengarna och går. Sedan kommer Leo. Han tror att ingen har tagit något och tar 1/3 av det som finns kvar. Sist kommer Mira och gör likadant. Då ligger 8 kr kvar i asken.



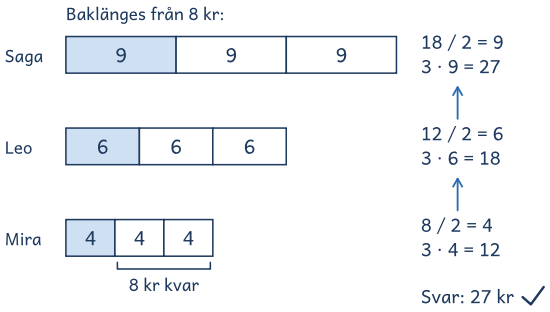
Hur mycket pengar fick syskonen för burkarna?

Hur mycket tog var och en?

Svaret: 27 kr. Saga tog 9 kr, Leo 6 kr och Mira 4 kr.
Kontroll: 27 − 9 = 18, 18 − 6 = 12, 12 − 4 = 8, och var och en tar 1/3.

Idén: *Varje gång blir 2/3 kvar, och 8 kr är 2/3 av det som Mira hittade.*

Lösning A: baklänges med staplar



Eleven ser att de 8 kr som blir kvar är två tredjedelar och går bakåt stapel för stapel.

Lösning B: pröva och förbättra

början	Saga	Leo	Mira	kvar
30	10	nej		
81	27	18	12	24
27	9	6	4	8 ✓

Så räknade vi 27:
27 / 3 = 9
27 − 9 = 18
18 / 3 = 6
18 − 6 = 12
12 / 3 = 4
12 − 4 = 8

81 gav 24 kvar.
24 är tre gånger så mycket som 8:
pröva en tredjedel, 81 / 3 = 27.

Svar: 27 kr ✓

Eleven prövar belopp i en tabell. 81 ger 24 kr kvar, tre gånger 8, så eleven prövar 81 / 3 = 27.

Lösning C: tankevurpa

Mira tog 8 kr: 3 · 8 = 24
Leo: 24 / 2 · 3 = 36
Saga: 36 / 2 · 3 = 54
Svar: 54 kr från början.

Eleven läser 8 kr som Miras del, men 8 kr blev kvar i asken. Med 54 kr blir 16 kr kvar.
Fråga: ”Vad är 8 kr i problemet?”

Frågor om tankarna bakom

1. Varför börjar eleven i lösning A med den nedersta stapeln?
2. Varför prövar eleven 27 efter 81 i lösning B?
3. Var syns det i båda lösningarna att 2/3 blir kvar varje gång?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med fem syskon, och varför?

Visa och jämför lösningar

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Hagland, Hedrén och Taflin (2005).

Lärarens sida: Medel, problem 10, Smörgåsarna

Problemlösning i grupp · åk 4–9

Problemet

Elsa, Jonas och Kim är på utflykt. Elsa har med sig 2 smörgåsar och Jonas har 3. Smörgåsarna är lika stora. Kim har glömt sin matsäck. De delar de fem smörgåsarna så att alla tre äter lika mycket. Sedan ger Kim 25 kr till Elsa och Jonas för det han har ätit.

Hur ska Elsa och Jonas dela de 25 kronorna, så att det blir rättvist?

Problemet handlar om bråk och rättvis delning. Smörgåsarna är lika stora, och Kim betalar för det han får av var och en. Elsa ska få 5 kr och Jonas 20 kr, eftersom Elsa ger Kim 1/3 smörgås och Jonas 4/3. Material: fem pappersrektanglar per par att vika i tredjedelar. Idén kommer ur Nyman, Säfström och Taflin i Nämnaren 2016:3.

Lösning A



Elsa: 6 tredjedelar Jonas: 9 tredjedelar

Alla äter 5 av 15 tredjedelar.
Kim får 1 av Elsas och 4 av Jonas.
Kim betalar 25 kr för 5 tredjedelar:
25 / 5 = 5 kr för en tredjedel

Elsa: 1 · 5 = 5 kr Jonas: 4 · 5 = 20 kr ✓

Lösning B

5 smörgåsar delas på 3:
5 / 3 = 5/3 var
Elsa ger: 2 − 5/3 = 1/3
Jonas ger: 3 − 5/3 = 4/3
Kim får 1/3 + 4/3 = 5/3 för 25 kr.
1/3 kostar 25 / 5 = 5 kr.

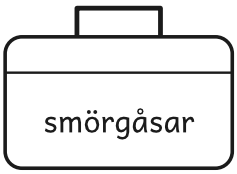
Elsa: 5 kr Jonas: 4 · 5 = 20 kr ✓

I passet	
Ringa in	Frågan, talen 2, 3 och 25, och orden *”lika mycket”* och *”rättvist”*.
Lyft ut	Vi vet: Elsas 2 och Jonas 3 smörgåsar är lika stora, alla äter lika mycket, och Kim betalar 25 kr. Vi ska ta reda på: hur mycket Elsa och Jonas ska få.
Ord och tal	Fråga: Vad betyder rättvist här? Betalar Kim för smörgåsarna Elsa och Jonas hade med sig, eller för det han äter?
Förutse	Smörgåsar som ritas i tredjedelar, bråk, eller pengarna efter antalet smörgåsar. Några svarar då 10 och 15 kr.
Kör de fast	Föreslå: Rita smörgåsarna och dela dem så att alla får lika. Efter några försök: Berätta vad ni har gjort! Ni sa att alla äter 5 tredjedelar. Försök använda det!
Säg inte	Elsa ger Kim 1/3 och Jonas ger 4/3. Det ger bort lösningen.
Mindre och större	Mindre: Elsa har 1 smörgås och Jonas 2, och Kim betalar 10 kr (Elsa 0 kr och Jonas 10 kr). Större: Elsa har 3 smörgåsar och Jonas 5, och Kim betalar 40 kr. Hur ska de dela nu? (Elsa 5 kr och Jonas 35 kr)
Jämför	Kim betalar för det han får av var och en. I A syns det i bitarna med K, och i B i 2 − 5/3 och 3 − 5/3.
Fel eller osäker	Ni säger att Elsa ska ha 10 kr. Hur kan ni kontrollera det mot det hon gav Kim? *”Är 5 och 20 kr rättvist?”* Hur kan ni kontrollera det?

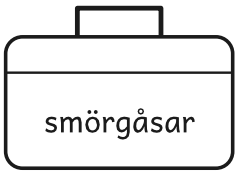
© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Smörgåsarna

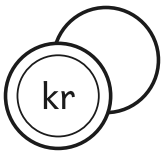
Elsa, Jonas och Kim är på utflykt. Elsa har med sig 2 smörgåsar och Jonas har 3. Smörgåsarna är lika stora. Kim har glömt sin matsäck. De delar de fem smörgåsarna så att alla tre äter lika mycket. Sedan ger Kim 25 kr till Elsa och Jonas för det han har ätit.



Elsa



Jonas



Kim

Frågan

Hur ska Elsa och Jonas dela de 25 kronorna, så att det blir rättvist?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

Smörgåsarna

Två elever har löst problemet på olika sätt. Titta först på lösning A och sedan på B, och prata om frågorna.

Lösning A



Elsa: 6 tredjedelar

Jonas: 9 tredjedelar

Alla äter 5 av 15 tredjedelar.

Kim får 1 av Elsas och 4 av Jonas.

Kim betalar 25 kr för 5 tredjedelar:

25 / 5 = 5 kr för en tredjedel

Elsa: 1 · 5 = 5 kr

Jonas: 4 · 5 = 20 kr ✓

Lösning B

5 smörgåsar delas på 3:

5 / 3 = 5/3 var

Elsa ger: 2 − 5/3 = 1/3

Jonas ger: 3 − 5/3 = 4/3

Kim får 1/3 + 4/3 = 5/3 för 25 kr.

1/3 kostar 25 / 5 = 5 kr.

Elsa: 5 kr

Jonas: 4 · 5 = 20 kr ✓

Frågor att prata om

1. Hur visar eleven i lösning A vad Kim äter av Elsas och Jonas smörgåsar?
2. Varför räknar eleven i lösning B 2 − 5/3?
3. Var syns det i båda lösningarna att Jonas ger fyra gånger så mycket som Elsa?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med fyra personer, och varför?

© Niclas Fohlin · niclasfohlin.se/stodundervisning/problemlosning-i-grupp

LÖSNINGSFÖRSLAG · TALUPPFATTNING

SMÖRGÅSARNA

PROBLEMET

Elsa, Jonas och Kim är på utflykt. Elsa har med sig 2 smörgåsar och Jonas har 3. Smörgåsarna är lika stora. Kim har glömt sin matsäck. De delar de fem smörgåsarna så att alla tre äter lika mycket. Sedan ger Kim 25 kr till Elsa och Jonas för det han har ätit.



Hur ska Elsa och Jonas dela de 25 kronorna, så att det blir rättvist?

Svaret: Elsa ska få 5 kr och Jonas 20 kr.
Kontroll: Elsa ger $2 - 5/3 = 1/3$ och Jonas $3 - 5/3 = 4/3$, och $5 + 4 \cdot 5 = 25$.

IDÉN: *Kim betalar för det han får av var och en: 1/3 smörgås av Elsa och 4/3 av Jonas.*

LÖSNING A: SMÖRGÅSARNA I TREDJEDELAR



Alla äter 5 av 15 tredjedelar.
Kim får 1 av Elsas och 4 av Jonas.
Kim betalar 25 kr för 5 tredjedelar:
25 / 5 = 5 kr för en tredjedel

Elsa: $1 \cdot 5 = 5$ kr Jonas: $4 \cdot 5 = 20$ kr ✓

Eleven delar smörgåsarna i tredjedelar och räknar hur många tredjedelar Kim får av Elsa och av Jonas.

LÖSNING B: RÄKNA MED BRÅK

5 smörgåsar delas på 3:
5 / 3 = 5/3 var
Elsa ger: $2 - 5/3 = 1/3$
Jonas ger: $3 - 5/3 = 4/3$
Kim får $1/3 + 4/3 = 5/3$ för 25 kr.
1/3 kostar 25 / 5 = 5 kr.

Elsa: 5 kr Jonas: $4 \cdot 5 = 20$ kr ✓

Eleven räknar ut att var och en äter 5/3 smörgås och drar det från Elsas 2 och Jonas 3.

LÖSNING C: TANKEVURPA

25 / 5 = 5 kr per smörgås
Elsa: $2 \cdot 5 = 10$ kr
Jonas: $3 \cdot 5 = 15$ kr
Svar: Elsa 10 kr, Jonas 15 kr.

Kim betalar för det han äter. Elsa åt själv 5/3 och gav Kim bara 1/3 smörgås.
Fråga: ”Vad betalar Kim för, och vem gav honom mest?”

FRÅGOR OM TANKARNA BAKOM

1. Hur visar eleven i lösning A vad Kim äter av Elsas och Jonas smörgåsar?
2. Varför räknar eleven i lösning B $2 - 5/3$?
3. Var syns det i båda lösningarna att Jonas ger fyra gånger så mycket som Elsa?
4. Vilken lösning liknar er egen? Vilken skulle ni välja med fyra personer, och varför?

VISA OCH JÄMFÖR LÖSNINGAR

- **Först.** Låt eleverna lösa problemet på sitt sätt. Fråga innan du visar: ”Hur tänkte ni?”
- **Två sätt.** Visa två lösningar bredvid varandra, A och B eller två elevers. Börja med det vanligaste, och täck det andra tills det första är förklarat.
- **Tankevurpan.** Säg att lösning C kommer från en annan skola, så att ingen i gruppen känner sig utpekad. Låt eleverna hitta tankevurpan, och ställ frågan bredvid C när de kör fast.
- **Tankarna bakom.** Låt eleverna förklara med egna ord. Säg rätt eller fel först när gruppen har prövat svaret mot problemet.
- **Det gemensamma.** Avsluta med det som är lika i lösningarna, idén, så att eleverna kan använda den igen.

Idén kommer ur Nyman, Säfström och Taflin i Nämnaren 2016:3.